

BAC 2026 - Spécialité - Métropole

Sujet 1 - Corrigé - antoine.maths@gmail.com

Exercice 1

Partie A

1.a)

La probabilité $P(C)$ qu'une famille réserve une cabine est donnée dans l'énoncé.

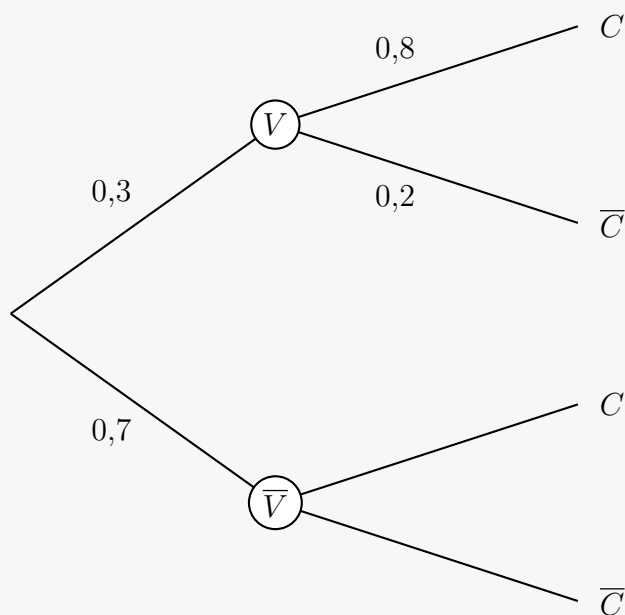
Résultat

On sait que $P(C) = 0,75$

1.b)

Je ne détaille pas, les éléments principaux sont donnés directement dans l'énoncé.

Résultat



2)

Rappel

On va utiliser la formule $P(V \cap C) = P(V) \times P_C(V)$

Cela signifie qu'on multiplie les probabilités des branches correspondantes

$$P(V \cap C) = P(V) \times P_C(V) = 0,3 \times 0,8 = 0,24$$

Résultat

La probabilité qu'une famille réserve un emplacement pour un véhicule et une cabine est de 0,24.

3)

On utilise la formule des probabilités conditionnelles, qui est une variante de la formule précédente.

$$P_C(V) = \frac{P(V \cap C)}{P(C)} = \frac{0,24}{0,75} = 0,32$$

Résultat

La probabilité qu'une famille réserve un emplacement pour un véhicule sachant qu'elle a réservé une cabine est de 0,32.

4)

Les événements forment une partition de l'univers.

On utilise cette fois la formule des probabilités totales.

$$\text{Et donc } P(C) = P(V \cap C) + P(\bar{V} \cap C) = P(V \cap C) + P(\bar{V}) \times P_{\bar{V}}(C)$$

$$\text{D'où } P_{\bar{V}}(C) = \frac{P(C) - P(V \cap C)}{P(\bar{V})}$$

Résultat

Donc $P_{\bar{V}}(C) \approx 0,73$.

Près des $\frac{3}{4}$ des familles ayant réservé une cabine n'ont pas réservé d'emplacement pour voiture.

Partie B

1)

Rappel

Formules de l'espérance et de la variance :

$$E(X) = \sum_i x_i P(X = x_i) \quad V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

On trouve donc $E(X) = 0 \times 0,19 + 70 \times 0,06 + 100 \times 0,51 + 170 \times 0,24 = 96$

Et $V(X) = 70^2 \times 0,06 + 100^2 \times 0,51 + 170^2 \times 0,24 - 96^2 = 3114$

Résultat

Donc on confirme que $E(X) = 96$ et $V(X) = 3114$.

2.a)

Avec 40% de remise, chacun des articles verra son prix multiplié par 0,6

Résultat

Et donc $Z = 0,6(X + Y)$.

2.b)

Rappel

L'espérance est linéaire (pas sa définition même) et $E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$

Ca n'est pas aussi "simple" pour la variance, dont la définition fait intervenir des carrés, mais si 2 variables aléatoires sont indépendantes, on a

$$V(aX + bY) = a^2V(X) + b^2V(Y)$$

$$\text{Ainsi } E(Z) = 0,6E(X) + 0,6E(Y) = 0,6 \times 96 + 0,6 \times 104 = 120$$

$$\text{Et } V(Z) = 0,6^2 \times V(X) + 0,6^2 \times V(Y) = 0,36 \times 3114 + 0,36 \times 1686 = 1728$$

Résultat

Donc $E(Z) = 120$ et $V(Z) = 1728$.

3.a)

Les résultats demandés découlent directement des formules données en rappel.

En effet, pour toutes les variables Z_i , $E(Z_i) = E(Z)$ et $V(Z_i) = V(Z)$, puisque toutes les variables aléatoires Z_i suivent la même loi de probabilité de Z .

Ainsi

$$E(M_n) = E\left(\frac{Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n}{n}\right) = \frac{1}{n}E(Z_1 + \dots + Z_n) = \frac{1}{n} \times nE(Z) = E(Z)$$

Et sur le même principe,

$$V(M_n) = V\left(\frac{Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2}V(Z_1 + \dots + Z_n) = \frac{1}{n^2} \times nV(Z) = \frac{V(Z)}{n}$$

Résultat

Donc $E(M_n) = 120$ et $V(M_n) = \frac{1728}{n}$.

3.b)

Je n'insiste pas, j'ai déjà mis des rappels et remarques dans les autres épreuves de cette année que j'ai partagées, c'est une nouvelle fois l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev avec les inégalités "inversées" qu'on va utiliser.

$$\text{Comme } |M_n - E(M_n)| < 6 \Leftrightarrow 114 < M_n < 126$$

L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev nous donne donc

$$P(114 < M_n < 126) \geq 1 - \frac{V(M_n)}{6^2} = 1 - \frac{1728}{36n}$$

On cherche donc n tel que $1 - \frac{1728}{36n} \geq 0,85$

Ou encore $\frac{1728}{36n} \leq 0,15$ soit $1728 \leq 0,15 \times 36n = 5,4n$

Et finalement, $n \geq \frac{1728}{5,4} = 320$

Résultat

Donc $P(114 < M_n < 126) \geq 0,85$ à partir de $n = 320$.

Autrement dit, à partir de 320 familles, ces dernières vont dépenser en moyenne entre 114 et 126 avec une probabilité de 0,85

Exercice 2

1)

On a $\overrightarrow{AB}(-1; 1; -5)$, qui est par définition un vecteur directeur de (AB) .

Par un merveilleux hasard, d'après l'équation donnée pour $(\mathcal{P})$, un vecteur orthogonal en est $(-1; 1; -5)$, ce qui confirme la première partie de l'affirmation, (AB) est orthogonale à $(\mathcal{P})$.

Soit I le milieu de $[AB]$, on trouve $I\left(\frac{5}{2}; \frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$.

On doit donc vérifier si I vérifie l'équation de $(\mathcal{P})$.

Avec des notations évidentes, $-x_I + y_I - 5z_I - \frac{1}{2} = -\frac{5}{2} + \frac{1}{2} - 5 \times \left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} = 0$

Ce qui nous assure que $I \in (\mathcal{P})$.

Résultat

L'affirmation 1 est vraie.

2)

Rappel

On prends les coordonnées d'un vecteur directeur de la droite comme coefficient du paramètre et les coordonnées d'un point de la droite comme constante (ce qui signifie que la droite passe par ce point pour $k = 0$ (que je prends comme paramètre ou $t = 0$ selon comment tu nommes le paramètre).

A partir des éléments connus, on peut déduire une représentation paramétrique de (AB) :

$$\begin{cases} x = 3 - k \\ y = k \\ z = 2 - 5k \end{cases} \quad k \in \mathbb{R}$$

Il faut donc chercher s'il existe des paramètres k et t qui décrivent un même point. Ce qui donne le système :

$$\begin{cases} t = 3 - k \\ -1, 5 - t = k \\ 2 - 2t = 2 - 5k \end{cases} \quad t, k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 - k \\ -1, 5 - t = k \\ 2t = 5k \end{cases} \quad t, k \in \mathbb{R}$$

Etudions les lignes séparément (de façon à alléger l'écriture :

La dernière ligne donne immédiatement : $t = \frac{5}{2}k$

En remplaçant dans la 1ère ligne, on obtient : $\frac{5}{2}k = 3 - k$

D'où $\frac{7}{2}k = 3$ et donc $k = \frac{6}{7}$

En utilisant cette valeur dans la 2ème ligne, on trouve : $-\frac{3}{2} - t = \frac{6}{7}$

Et donc $t = -\frac{3}{2} - \frac{6}{7} = -\frac{33}{14}$

Mais l'égalité $t = \frac{5}{2}k$ donne $t = \frac{15}{7}$, donc le système n'a pas de solution et les droites ne sont donc pas sécantes.

Résultat

L'affirmation 2 est fausse.

3) Nous allons utiliser 2 expressions du produit scalaire pour trouver la valeur de cet angle.

On a : $\vec{CA} \left(\frac{3}{2}; 3; 3 \right)$ et $\vec{CB} \left(\frac{1}{2}; 4; -2 \right)$

Donc $\vec{CA} \cdot \vec{CB} = \frac{3}{2} \times \frac{1}{2} + 3 \times 4 - 3 \times 2 = \frac{27}{4}$

Par ailleurs, $CA = \sqrt{\frac{9}{4} + 9 + 9} = \sqrt{\frac{81}{4}} = \frac{9}{2}$ et $CB = \sqrt{\frac{1}{4} + 16 + 4} = \sqrt{\frac{81}{4}} = \frac{9}{2}$

Et $\vec{CA} \cdot \vec{CB} = CA \times CB \times \cos \widehat{ACB}$, ce qui donne $\frac{81}{4} \cos \left(\widehat{ACB} \right) = \frac{27}{4}$

Donc $\cos \left(\widehat{ACB} \right) = \frac{27}{81} = \frac{1}{3}$

Et finalement $\widehat{ACB} = \arccos \left(\frac{1}{3} \right) \approx 70,5^\circ$

Résultat

L'affirmation 3 est vraie.

3)

Pour la porte A, il y a $8 \times 7 \times 6 = 336$ combinaisons possibles.

Pour la porte B, il y a $\binom{8}{4} = 70$ combinaisons possibles, car l'ordre n'a pas d'importance.

La probabilité de trouver le bon code pour Clotilde (porte A) est donc de $\frac{1}{336}$ alors que celle de Titouan (porte B) est de $\frac{1}{70}$, ce qui confirme l'affirmation.

Résultat

L'affirmation 4 est vraie.

Exercice 3

Partie A

1)

Pour trouver les solutions de (E) , nous allons d'abord chercher les solutions de l'équation homogène, puis une solution particulière.

Equation homogène : L'équation homogène de (E) est :

$$(E_0) : y' = -0,035y$$

C'est une équation standard, dont les solutions sont $y_0(t) = Ke^{-0,035t}$, $K \in \mathbb{R}$.

Solution particulière : comme le second membre est une fonction constante, nous allons chercher une fonction constante comme solution particulière (dont la dérivée sera donc nulle).

$$(E_p) : -0,035y_p(t) + 0,91 = 0$$

$$\text{La solution est donc } y_p(t) = \frac{0,91}{0,035} = 26.$$

Résultat

Finalement, les solutions de (E) sont $y(t) = Ke^{-0,035t} + 26$, $K \in \mathbb{R}$

2)

On a donc T qui est de la forme $T(t) = Ke^{-0,035t} + 26$, $K \in \mathbb{R}$ et il faut déterminer K grâce à la valeur en 0, $T(0) = 18$

$$\text{Or } T(0) = K + 26 \text{ et donc } K = -8$$

Résultat

$$T(t) = 26 - 8e^{-0,035t}$$

3)

$$\text{On cherche } t \text{ tel que } T(t) = 26 - 8e^{-0,035t} = 20$$

$$\text{Donc } 8e^{-0,035t} = 6 \text{ ou encore } e^{-0,035t} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

$$\text{En passant au logarithme, on a } -0,035t = \ln\left(\frac{3}{4}\right)$$

Et donc $t = \frac{1}{0,035} \ln\left(\frac{4}{3}\right) \approx 8,2$

L'unité utilisée étant de 10 minutes,

Résultat

La température de la pièce atteint 20 degrés au bout de 1 heure et 22 minutes.

4)

La fonction $t \mapsto e^{-0,035t}$ est décroissante et tend vers 0 en $+\infty$. (je ne détaille pas, c'est une fonction typique de ce que tu as étudié cette année. N'hésite pas à détailler les étapes si besoin et n'hésite pas à me demander si besoin !)

La fonction T est croissante et sa limite en $+\infty$ vaut 26.

Résultat

La température de la pièce ne peut jamais atteindre 28 degrés.
On peut même préciser qu'elle ne peut pas dépasser 26 degrés.

Partie B

1)

Comme $u_0 = 20$, à partir de la définition donnée pour la suite, on a :
 $u_1 = 0,965 \times 20 + 0,35 + 0,07 = 19,72$

Résultat

Donc $u_1 = 19,72$

2) Procédons à une démonstration par récurrence comme indiqué dans l'énoncé.

Initialisation : $u_0 = 20 > 10$

Hérédité : Supposons qu'au rang n , $u_n > 10$ et étudions le rang $n + 1$

$$u_{n+1} = 0,965u_n + 0,35 + 0,07e^{-0,1n}$$

Or, $0,07e^{-0,1n} > 0$ et par hypothèse de récurrence, $u_n > 10$.

$$\text{Donc } u_{n+1} > 9,65 + 0,35 = 10$$

Ce qui confirme l'hérédité de la proposition.

Résultat

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 10$

3)

Remarque

On admet la décroissance de la suite, comme indiqué dans l'énoncé. C'est un peu dommage, ça n'est pas très compliqué à démontrer, surtout après le résultat précédent. N'hésite pas à le faire en exercice !

La suite (u_n) est donc décroissante et minorée.

Résultat

Donc d'après le théorème de la limite monotone, (u_n) converge.

4.a)

On a l'égalité valable pour tout n , $u_{n+1} = 0,965u_n + 0,35 + 0,07e^{-0,1n}$

Or, quand $n \rightarrow +\infty$, $u_n \rightarrow l$, mais aussi, $u_{n+1} \rightarrow l$.

Par ailleurs, $-0,1n \rightarrow -\infty$ et donc $e^{-0,1n} \rightarrow 0$

En passant à la limite, on trouve que $l = 0,965l + 0,35$

Résultat

On trouve que l doit être solution de l'équation $x = 0,965x + 0,35$.

4.b)

On veut résoudre $x = 0,965x + 0,35$

D'où $x - 0,965x = 0,35$ ou encore $0,035x = 0,35$

Résultat

On trouve donc $l = 10$.

Sans mécanisme de contrôle, la température de la pièce redescendrait jusqu'à 10°C

5.a)

Je donne juste les lignes à compléter, n'hésite pas à contre checker en testant le programme !

Résultat

```
while u >= 18
    u = 0.965 * u + 0.35 + 0.07 * math.exp(-0.1 * n)
    n = n + 1
```

Remarque

Attention, le programme n'est pas fonctionnel en l'état, il faut le package math pour utiliser la fonction exponentielle. C'est un peu dommage de ne pas l'ajouter dans les 1ères lignes !

5.b) On utilise la calculatrice pour cette question.

On trouve $u_7 \approx 18,12$ et $u_8 \approx 17,87$

Résultat

Donc le système de chauffage se remettra en marche au bout de 1 heure 20 (80 minutes).

Exercice 4

Partie A

1)

Sur la représentation graphique, on peut lire $f(0) = 1$

$$\text{Or, } f(0) = a + \frac{b \ln(1)}{1} = a$$

Résultat

Donc $a = 1$.

2.a)

On voit que le coefficient directeur de T_A vaut 4 et les coordonnées de A sont $(0; f(0))$, ce coefficient directeur correspond à $f'(0)$

Résultat

Donc $f'(0) = 4$.

2.b)

On voit que la courbe représente une fonction concave sur $[0; 2]$ (et même plus largement, mais cela suffit pour la question!) car on note que la courbe est en dessous de ses tangentes.

Résultat

Donc $f''(1) < 0$.

3.a) La dérivabilité est assurée par l'énoncé, là aussi, n'hésite pas à trouver / rédiger la justification.

$$\forall x \in]1; +\infty[, f'(x) = \frac{\frac{b}{x+1}(x+1) - b \ln(x+1)}{(x+1)^2} = \frac{b - b \ln(x+1)}{(x+1)^2}$$

Résultat

$$\text{Donc } \forall x \in]1; +\infty[, f'(x) = \frac{b(1 - \ln(x+1))}{(x+1)^2}$$

3.b)

A partir de l'expression trouvée, et de la question 2.a, on a $f'(0) = b = 4$

Résultat

$$\text{Donc } b = 4$$

Partie B**1)**

Quand $x \rightarrow +\infty$, $\frac{\ln(x+1)}{x+1} \rightarrow 0$ par croissance comparée (c'est une forme indéterminée de type " $\frac{\infty}{\infty}$ ",
et donc $f(x) \rightarrow 1$.

Résultat

Donc la droite d'équation $y = 1$ est asymptote (horizontale) à la courbe représentative de f .

2)

$$1 - \ln(x+1) > 0 \Leftrightarrow \ln(x+1) < 1$$

$$\text{d'où } x+1 < e$$

$$\text{Et finalement } x < e - 1$$

Résultat

Les solutions de $1 - \ln(x+1) > 0$ sont l'intervalle $] -1; e - 1[$

3) On admet un nouveau résultat, qui est pourtant vu en cours.

On remarque que le signe de $1 - \ln(x+1)$ nous donne le signe de f' et on peut en déduire le tableau de variation de f .

De plus, à partir de ce qu'on a vu dans la question précédente, le maximum de f se trouve en $e - 1$ et vaut $f(e - 1) = 1 + 4 \frac{\ln(e)}{e} = 1 + \frac{4}{e} \approx 2,47$

Résultat

x	-1			$e-1$	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$			$1+\frac{4}{e}$		
		$-\infty$			1

4)

Comme $e - 1 < 2$, f est strictement décroissante sur $[2; +\infty[$ et on vérifie que $1,5 \in \left[1; 1 + \frac{4}{e}\right]$.

On peut donc utiliser le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires.

Résultat

Donc l'équation $f(x) = 1,5$ admet une unique solution sur $[2; +\infty[$

A la calculatrice, on vérifie la valeur de la solution

Résultat

Donc la solution de l'équation $f(x) = 1,5$ sur $[2; +\infty[$ vaut $x \approx 25,1$ à 10^{-1} près.

5.a)

On considère la fonction définie et dérivable sur $[0; 2]$ $u(x) = \ln(x + 1)$

Sa dérivée est $u'(x) = \frac{1}{x + 1}$.

Rappel

La quantité à intégrer est de la forme uu' , dont une primitive est $\frac{1}{2}u^2$

Ainsi,

$$\int_0^2 \frac{\ln(x + 1)}{x + 1} dx = \frac{1}{2} [(\ln(x + 1))^2]_0^2 = \frac{1}{2} (\ln 3)^2$$

Résultat

Donc

$$\int_0^2 \frac{\ln(x+1)}{x+1} dx = \frac{1}{2} (\ln 3)^2$$

5.b)

f étant positive sur l'intervalle considéré l'aire $\mathcal{A}$ considérée vaut

$$\mathcal{A} = \int_0^2 f(x) dx$$

par linéarité de l'intégrale, on peut écrire,

$$\mathcal{A} = \int_0^2 f(x) dx = \int_0^2 1 + 4 \frac{\ln(x+1)}{x+1} dx = \int_0^2 1 dx + 4 \int_0^2 \frac{\ln(x+1)}{x+1} dx$$

$$\text{D'où, } \mathcal{A} = 2 + 4 \times \frac{1}{2} (\ln 3)^2 = 2 (1 + (\ln 3)^2) \approx 4,4$$

Résultat

Donc l'aire du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe représentative de la fonction f , l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 2$ vaut

$$\mathcal{A} = 2 (1 + (\ln 3)^2) \approx 4,4$$