

BAC 2026 - Spécialité - Métropole

Sujet 2 - Corrigé - antoine.maths@gmail.com

Exercice 1

1)

On a $\overrightarrow{AB}(1; -3; -1)$ et $\overrightarrow{AC}(-2; -2; 0)$

Ils sont évidemment non colinéaires.

Résultat

Donc (ABC) est un plan

2.a)

Rappel

Un vecteur est normal à un plan si et seulement si il est orthogonal à 2 vecteurs non colinéaires du plan.

On va donc calculer les produits scalaires :

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 1 \times 1 + (-1) \times (-3) + 4 \times (-1) = 1 + 3 - 4 = 0$$

$$\text{Et } \vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 1 \times (-2) + (-1) \times (-2) + 4 \times 0 = -2 + 2 = 0$$

Ainsi, $\vec{n} \perp \overrightarrow{AB}$ et $\vec{n} \perp \overrightarrow{AC}$

Résultat

Donc $\vec{n}$ est orthogonal à (ABC)

2.b)

D'après la question précédente, une équation cartésienne de (ABC) est $x - y + 4z + d = 0$

Or $C \in (ABC)$ et vérifie donc cette équation.

Donc $1 + 4 + d = 0$ ou $d = -5$

Remarque

On peut choisir n'importe quel point du plan dont on connaît les coordonnées.
J'ai choisi C car ses coordonnées amène les calculs les plus simples, en particulier il y a un 0.

Résultat

Donc une équation cartésienne de (ABC) est $x - y + 4z - 5 = 0$

3)

Δ est orthogonale à (ABC) , donc $\vec{n}$ en est un vecteur directeur.

Sa représentation paramétrique est donc de la forme :

$$\begin{cases} x = t + a \\ y = -t + b \\ z = 4t + c \end{cases} \quad a, d, c, t \in \mathbb{R}$$

Or $D \in \Delta$ et en prenant $t = 0$, on trouve :

$$\begin{cases} 0 = a \\ 0 = b \\ 2 = c \end{cases}$$

Résultat

Donc une représentation paramétrique de Δ est

$$\begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = 4t + 2 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

4)

On a $H \in \Delta$ et $H \in (ABC)$ et donc ses coordonnées vérifient les 2 représentations.

Ainsi, on doit avoir $t + t + 16t + 8 - 5 = 18t + 3 = 0$

$$\text{Donc } t = -\frac{3}{18} = -\frac{1}{6}$$

Ce qui donne pour les coordonnées de H , $x = -\frac{1}{6}$, $y = \frac{1}{6}$ et $z = 4 \times \left(-\frac{1}{6}\right) + 2 = -\frac{4}{3}$.

Résultat

Donc le projeté orthogonal de D sur (ABC) est $H \left(-\frac{1}{6}; \frac{1}{6}; -\frac{4}{3}\right)$

5.a)

On connaît déjà $\vec{AB}(1; -3; -1)$, ce qui nous donne $AB = \sqrt{1 + 9 + 1} = \sqrt{11}$

On trouve $\vec{BC}(-3; 1; 1)$ et donc $BC = \sqrt{9 + 1 + 1} = \sqrt{11} = AB$

Par ailleurs, avec $\vec{AC}(-2; -2; 0)$, on a $AC = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

Résultat

Donc ABC est isocèle en B

5.b)

Comme ABC est isocèle en B , I milieu de (AC) est le pied de la hauteur issue de B .

Or $I(1; 0; 1)$, d'où $\vec{IB}(2; -2; -1)$ et $IB = 3$

$$\text{Ainsi, } \mathcal{A}_{ABC} = \frac{3 \times 2\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$$

Résultat

Donc l'aire de ABC est de $3\sqrt{2}$

6.a)

En notant V le volume de $ABCD$ et en utilisant la formule rappelée dans l'énoncé, on a $V = \frac{1}{3}\mathcal{A}_{ABC} \times DH$.

Comme $\overrightarrow{HD} \left(\frac{1}{6}; -\frac{1}{6}; \frac{2}{3} \right)$, on trouve $HD = \sqrt{\frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{18}{36}} = \sqrt{\frac{1}{2}}$

Et donc $V = \frac{1}{3} \times 3\sqrt{2} \times \sqrt{\frac{1}{2}} = 1$

Résultat

Donc le volume de $ABCD$ vaut 1

6.b)

On utilise à nouveau la formule du volume, qui nous donne $\frac{1}{3} \times \mathcal{A}_{BCD} \times \sqrt{2} = 1$

Et donc $\mathcal{A}_{BCD} = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

Résultat

Donc l'aire BCD vaut $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

7.a)

Pour que A, B, C et D_k soient coplanaires, il faut que D_k (ou plutôt ses coordonnées) vérifie l'équation de (ABC) déterminée à la question 2.b.

Compte-tenu des coordonnées de D_k , l'équation à résoudre est assez simple : $4k - 5 = 0$,
Qui donne donc $k = \frac{5}{4}$.

Résultat

Donc A, B, C et D_k sont coplanaires pour $k = \frac{\sqrt{5}}{4}$

7.b)

Dans le cas où les 4 points sont coplanaires,

Résultat

On a immédiatement que D_k est son propre projeté orthogonal sur (ABC) .

7.c)

Si A est le projeté orthogonal de D_k sur (ABC) , alors $\vec{n}$ et $\overrightarrow{AD_k}$ sont colinéaires.
Or $\overrightarrow{AD_k}(-2; -1; k-1)$ et $\vec{n}(1; -1; 4)$

Et comme $x\vec{n} = -y\vec{n}$, mais que $x\overrightarrow{AD_k} \neq -y\overrightarrow{AD_k}$ (aucune de ces coordonnées ne dépend que k).

Résultat

A ne peut pas être le projeté orthogonal de D_k sur (ABC) quelque soit la valeur de k .

Exercice 2

Partie A

1)

On calcule :

$$V_1 = 0,995 \times 0 + 6 = 6$$

$$\text{Et } V_2 = 0,995 \times 6 + 6 = 11,97$$

Résultat

Donc on trouve $V_1 = 6$ et $V_2 = 11,97$

2)

Je donne juste les lignes à compléter

Résultat

$v = 0$ (initialisation de la variable)

$v = 0.995 * v + 6$ (on itère la formule de récurrence)

3)

Remarque

Vu la formulation de la question, j'ai un doute sur l'attendu, mais je pense qu'il est plus simple de montrer l'encadrement en 2 temps.

N'hésite pas à m'indiquer si tu as une meilleure idée !

Montrons d'abord par récurrence que la suite est majorée.

Initialisation : $V_0 = 0 \leq 1200$

hérédité : supposons qu'au rang n , $V_n \leq 1200$ et étudions le rang $n+1$

$$V_{n+1} = 0,995V_n + 6 \leq 0,995 \times 1200 + 6 = 1194 + 6 = 1200$$

Ce qui assure déjà que $\forall n \in \mathbb{N}$, $V_n \leq 1200$

Étudions maintenant la monotonie de la suite (il n'y a pas besoin de récurrence pour cette partie) :

$\forall n \in \mathbb{N}, V_{n+1} - V_n = 0,995V_n + 6 - V_n = -0,005V_n + 6 \geq 0$
 Donc (V_n) est croissante.

Résultat

Finalement, on conclut que $\forall n \in \mathbb{N}, V_n \leq V_{n+1} \leq 1200$

4)

D'après le théorème de la limite monotone, (V_n) est croissante et majorée, donc convergente vers une limite l .

De plus, on a la relation de récurrence $V_{n+1} = f(V_n)$ avec $f : x \mapsto 0,995x + 6$

Comme f est une fonction continue, on peut appliquer le théorème du point fixe, l vérifie $f(l) = l$.

Autrement dit, l vérifie $0,995l + 6 = l$

D'où $l - 0,995l = 6$ ou $0,005l = 6$

Et finalement $l = 1200$

Remarque

En fait, on avait résolu cette équation (sans vraiment le faire apparaitre) pour démontrer que (V_n) est majorée.

Résultat

Donc (V_n) converge vers 1200.

Partie B

1.a)

Pour déterminer les solutions de (E) , on va déterminer les solutions de l'équation homogène, puis chercher une solution particulière.

Equation homogène : L'équation homogène est $(E_h) : y' = -0,005y$

On utilise la formule du cours pour trouver $\forall t \in [0; +\infty[, y_h(t) = Ke^{-0,005t}, K \in \mathbb{R}$

Solution particulière : Le second membre étant une fonction constante, nous allons chercher une fonction constante comme solution particulière, donc de dérivée nulle.

Cela revient à chercher une solution à $-0,005y + 6 = 0$ (ça doit te dire quelque chose !)

Dont la solution est (exprimé sous forme de fonction constante) :

$\forall t \in [0; +\infty[, y_0(t) = 1200$

En additionnant les 2 éléments, on obtient :

Résultat

Les solutions de (E) sur $[0; +\infty[$ sont les fonctions $y(t) = Ke^{-0,005t} + 1200, K \in \mathbb{R}$

1.b)

On cherche donc la solution particulière de (E) telle que $v(0) = 0$

D'après la question précédente, $v(0) = K + 1200$

D'où on tire $K = -1200$.

Et finalement, $\forall t \in [0; +\infty[$, $v(t) = -1200e^{-0,005t} + 1200 = 1200(1 - e^{-0,005t})$

Résultat

Donc $\forall t \in [0; +\infty[$, $v(t) = 1200(1 - e^{-0,005t})$

1.c)

Pas de difficulté pour cette limite,

Quand $t \rightarrow +\infty$, $e^{-0,005t} \rightarrow 0$ et $v(t) \rightarrow 1200$

Résultat

Donc

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} v(t) = 1200$$

1.d)

v est dérivable sur $[0; +\infty[$ et $\forall t \in [0; +\infty[$, $v'(t) = -1200 \times (-0,005) e^{-0,005t} = 6e^{-0,005t} > 0$

Résultat

Donc v est strictement croissante sur $[0; +\infty[$

2)

D'après les questions précédentes, le volume maximal de substances polluante sera de 1200L.

$$\text{Or, } \frac{1200}{30000} = \frac{12}{300} = \frac{4}{100}$$

Résultat

Donc le pourcentage maximal de substance polluante est de 4% et il n'y aura pas besoin de nettoyage complet du bassin ?

3)

On cherche donc pour quelle valeur de t on a $v(t) = 50$

On doit donc résoudre l'équation $v(t) = 1200(1 - e^{-0,005t}) = 50$

Ce qui donne $1200 - 50 = 1200e^{-0,005t}$ et donc $1150 = 1200e^{-0,005t}$

$$\text{D'où } e^{-0,005t} = \frac{1150}{1200} = \frac{23}{24}$$

En passant au logarithme, $-0,005t = \ln\left(\frac{23}{24}\right) = \ln(23) - \ln(24)$

Et finalement $t = \frac{\ln(24) - \ln(23)}{0,005} = 200(\ln(24) - \ln(23)) \approx 8,5$

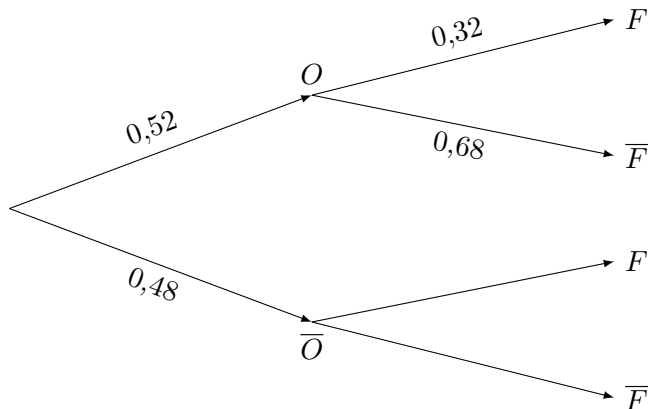
Résultat

Donc on atteint 50L de substance polluante au bout de 8 heures et 30 minutes.

Exercice 3

1)

Avec les éléments de l'énoncé, on peut remplir une partie de l'arbre de probabilité :



Rappel

Formule des probabilités conditionnelles : $P_F(O) = \frac{P(F \cap O)}{P(F)}$

On trouve avec les éléments donnés,

$$P(F) = 0,2$$

$$P(F \cap O) = 0,52 \times 0,32 = 0,1664$$

$$\text{Et donc } P_F(O) = \frac{P(F \cap O)}{P(F)} = \frac{0,1664}{0,2} \approx 0,832$$

Résultat

L'affirmation 1 est vraie.

2) On reconnaît une loi binômiale $\mathcal{B}(5000; 0,062)$

On vérifie à la calculatrice : $P(X \leq 340) \approx 0,96$

Résultat

L'affirmation 2 est fausse.

Rappel

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev : $\forall \epsilon > 0, P(|X - E(X)| \geq \epsilon) \leq \frac{V(X)}{\epsilon^2}$

Attention

Il faut faire attention (d'où le titre) au "sens" dans lequel on utilise l'inégalité, en fonction de l'énoncé.

Le corollaire de l'inégalité précédente est $\forall \epsilon > 0, P(|X - E(X)| < \epsilon) \geq 1 - \frac{V(X)}{\epsilon^2}$

C'est cette dernière qu'on va utiliser. Dans un autre sujet de l'année on a déjà eu la même chose.

Rappel

Pour une loi binomiale $\mathcal{B}(n; p)$, on a : $E(X) = np$ et $V(X) = np(1 - p)$

En utilisant les formules rappelées, on trouve l'espérance $E(X) = 5000 \times 0,062 = 310$
Et la variance $V(X) = 5000 \times 0,062 \times (1 - 0,062) = 290,78$

On cherche un nombre de musiciens strictement compris entre 230 et 390, ce qui se traduit avec la valeur de l'espérance par : $|X - E(X)| < 80$, je te laisse vérifier si besoin !

Cela signifie par rapport à la formule qu'on a $\epsilon = 80$

En utilisant la valeur de l'espérance, $1 - \frac{V(X)}{\epsilon^2} = 1 - \frac{290,78}{80^2} = 0,955$

Ce qui confirme que $P(|X - E(X)| < 80) \geq 95\%$

Résultat

L'affirmation 3 est vraie.

3)

On forme une équipe en prenant 2 musiciens parmi les 4, puis 3 non-musiciens parmi les 6 présents.

Après ce choix, l'autre équipe est également formée avec les personnes restantes !

Donc le nombre d'équipe possible est : $\binom{4}{2} \times \binom{6}{3} = 120$

Résultat

L'affirmation 4 est vraie.

Exercice 4

Partie A

1.a)

Résultat

On lit sur le graphique $f(1) \approx 2,8$

1.b)

La solution de l'équation est l'abscisse du point A

Résultat

On lit donc $f(x) = 0$ pour $x = \frac{1}{2}$

2) Bon, je crois qu'on est obligé de répondre pour avoir tous les points !

Résultat

On lit à nouveau $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$

3)

f est négative sur $\left[0; \frac{1}{2}\right]$ et donc ses primitives sont décroissantes sur cet intervalle. Ensuite f est positive, donc ses primitives croissantes.

On remarque que $\mathcal{C}_3$ est décroissante au-delà de $\frac{1}{2}$.

Les 2 autres courbes représentatives ont les bonnes variations.

Résultat

Donc les courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ représentent des primitives de f

Partie B

1.z)

On nous indique que $\forall x \in [0; +\infty[, f(x) = (2x - 1)e^{-2x+3}$

Donc $\forall x \in [0; +\infty[, f(x) = (2x - 1)e^{-2x+1+2} = e^2(2x - 1)e^{-2x+1} = e^2 \frac{2x - 1}{e^{2x-1}}$

Résultat

Donc $\forall x \in [0; +\infty[, f(x) = e^2 \frac{2x - 1}{e^{2x-1}}$

1.b)

Comme proposé, posons $X = 2x - 1$

On trouve donc $\forall X \in [-1; +\infty[, f(X) = e^2 \frac{X}{e^X}$

On reconnaît une forme dont on connaît la limite par croissante comparée,

$$\lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{X}{e^X} = 0$$

Et comme $e^2 > 0$,

Résultat

On peut conclure que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

2.a)

Remarque

Il y a manifestement une faute de frappe dans l'énoncé, on cherche l'expression de $f'(x)$

f est dérivable comme produit de fonctions qui le sont.

Remarque

On va calculer la dérivée à partir de l'expression de départ de f qui est un produit, plutôt que de l'expression sous forme de quotient qu'on a utilisé pour la limite.

$$\forall x \in [0; +\infty[, f'(x) = 2e^{-2x+3} - 2(2x-1)e^{-2x+3} = (2-4x+2)e^{-2x+3}$$

Résultat

Et finalement, $\forall x \in [0; +\infty[, f'(x) = (-4x+4)e^{-2x+3}$

2.b)

Comme $\forall x \in [0; +\infty[, e^{-2x+3} > 0$, f' est du signe de $-4x+4$, donc négative entre 0 et 1, puis positive.

Je te laisse vérifier les valeurs remarquables et on obtient le tableau de variations suivant

Résultat

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$-e^3$	e	0

3)

Par symétrie de la figure, la contrainte de 0,3 cm imposée par le client se traduit par 2 écarts de 0,15 cm au-dessus et en-dessous de l'axe des abscisses, axe de symétrie de la figure.

Résultat

Donc la contrainte imposée par le client revient à trouver α tel que $f(\alpha) = 0,15$

Or, f' est strictement négative sur $[1; +\infty[$, sauf en 1, donc f est strictement décroissante, à valeurs dans $]0; e]$

Résultat

Donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique α , tel que $f(\alpha) = 0,15$.

On lit $\alpha \approx 3,3$

Partie C

1) Procédons à l'intégration par parties suggérée

On considère les fonctions $u(x) = 2x - 1$, donc $u'(x) = 2$

Ainsi que $v'(x) = e^{-2x+3}$ et $v(x) = -\frac{1}{2}e^{-2x+3}$

$$\begin{aligned}\int_{1,5}^{3,3} f(x) dx &= \int_{0,5}^{3,3} (2x - 1) e^{-2x+3} dx = \left[-\frac{1}{2} (2x - 1) e^{-2x+3} \right]_{0,5}^{3,3} + \int_{0,5}^{3,3} e^{-2x+3} dx \\ &= -2,8e^{-3,6} - \left[\frac{1}{2} e^{-2x+3} \right]_{0,5}^{3,3} = -2,8e^{-3,6} - \frac{1}{2} (e^{-3,6} - e^2) \approx 3,6\end{aligned}$$

Résultat

Donc $I \approx 3,6$

2)

L'aire du logo vaut $2I$, je n'insiste pas sur la multiplication !

Résultat

Donc le volume du porte clé est de $1,44 \text{ cm}^3$