BAC 2026 - Spécialité - Centres Etrangers

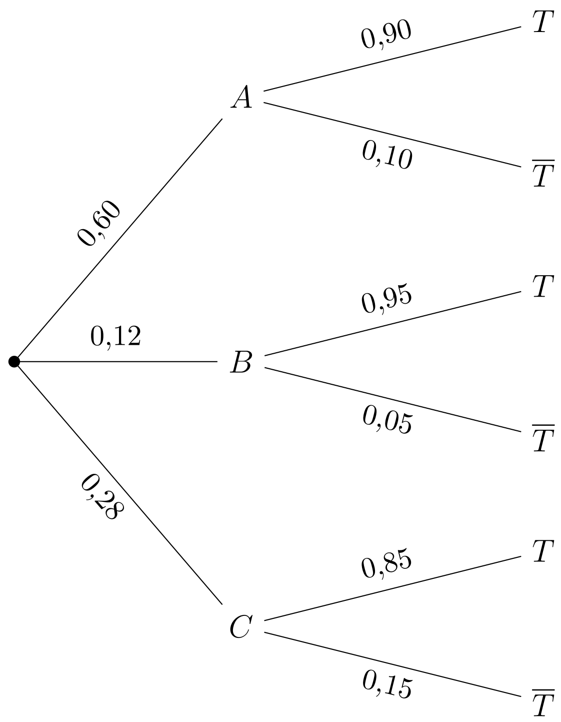
Sujet 1 - Corrigé

Exercice 1

PARTIE A

1) Notons déjà (c'est sous-entendu) que A, B et C forment une partition de l'univers considéré.

On trouve sans difficulté les probabilités manquantes pour remplir l'arbre de probabilités :



2)

Rappel

$\mathrm{P}\left(A \cap \overline{T}\right)$ signifie qu'on cherche la probabilité de tirer une épée non-conforme issue du lot A dans le stock de l'équipementier.
Pour trouver cette probabilité, on multiplie les probabilités de chacune des branches qu'on "parcourt", pour cette question, elle sont alors notées $\mathrm{P}(A)$ et $\mathrm{P}_A\left(\overline{T}\right)$

Ainsi, $\mathrm{P}\left(A \cap \overline{T}\right) = \mathrm{P}(A) \times \mathrm{P}_A\left(\overline{T}\right) = 0,60 \times 0,10 = 0,06.$

Résultat

Donc $\mathrm{P}\left(A \cap \overline{T}\right) = 0,06$
Ainsi, 6% des épées de l'équimentier sont des épées non-conformes provenant du fournisseur A.

3) D'après la formule des probabilités totales, on a :
$\mathrm{P}(T) = \mathrm{P}(A) \times \mathrm{P}_A(T) + \mathrm{P}(B) \times \mathrm{P}_B(T) + \mathrm{P}(C) \times \mathrm{P}_C(T)$

Remarque

Cette formule signifie simplement qu'on additionne les probabilités de toutes les façons de tirer une épée conforme.

Ainsi, $\mathrm{P}(T) = 0,60 \times 0,90 + 0,12 \times 0,95 + 0,28 \times 0,85 = 0,892$

Résultat

On vérifie bien que $\mathrm{P}(T) = 0,892$.

4)

Rappel

Rappelons la formule des probabilités conditionnelles : $\mathrm{P}_{\overline{T}}(B) = \dfrac{\mathrm{P}\left(B \cap \overline{T}\right)}{\mathrm{P}\left(\overline{T}\right)}$

De plus, d'après la question précédente, $\mathrm{P}\left(\overline{T}\right) = 1 - \mathrm{P}(T) = 1 - 0,892 = 0,108$
Et $\mathrm{P}\left(B \cap \overline{T}\right) = 0,12 \times 0,05 = 0,006$

Donc $\mathrm{P}_{\overline{T}}(B) = \dfrac{\mathrm{P}\left(B \cap \overline{T}\right)}{\mathrm{P}\left(\overline{T}\right)} = \dfrac{0,006}{0,108} = 0,056$

Résultat

Donc la probabilité qu'une lame testée non conforme provienne du fournisseur B est de $5,6\%$

PARTIE B

1) L'équipementier a amené $n = 75$ lames et la probabilité de "réussite" est de $p = 0,108$.

Résultat

Donc X suit une loi binômiale $\mathcal{B}(75; 0,108)$

2)

Rappel

Profitons là aussi de cette question pour rappeler la formule des probabilités d'une variable aléatoire suivant une loi binomiale.
$\mathrm{P}\left(X=k\right)=\binom{n}{k}p^{k}\left(1-p\right)^{n-k}$

On trouve ainsi : $\mathrm{P}\left(X=6\right)=\binom{75}{6}\times 0,108^{6}\times 0,892^{69}\approx 0,12$

Résultat

Donc la probabilité d'avoir 6 épées non conformes est $\mathrm{P}\left(X=6\right)=0,12$

3)

On utilise la calculatrice pour déterminer $\mathrm{P}\left(X\leqslant 8\right)\approx 0,578$
De plus, $\mathrm{P}\left(X>8\right)=1-\mathrm{P}\left(X\leqslant 8\right)\approx 1-0,578\approx 0,422$

Résultat

Donc la probabilité d'avoir strictement plus de 8 épées non conformes est de $42,2\%$.
L'équipementier a raison !

PARTIE C

1)

Rappel

Pour une variable aléatoire X suivante la loi binômiale $\mathcal{B}\left(n;p\right)$, on a les formule :
$E\left(X\right)=np$ et $V\left(X\right)=np\left(1-p\right)$

Toutes les variables aléatoires X_i ont la même espérance puisqu'elles suivent la même loi de probabilités : $E\left(X\right)=75\times 0,108=8,1$.

De plus, l'espérance est linéaire, donc $E\left(M_n\right)=\dfrac{1}{n}\left(nE\left(X\right)\right)=E\left(X\right)=8,1$

On a également $V\left(X\right)=75\times 0,108\times 0,892=7,2252$

Rappel

Pour 2 variables aléatoires indépendantes X et Y et un réel a, on a les formules suivantes :
$V\left(aX\right)=a^{2}V\left(X\right)$ et $V\left(X+Y\right)=V\left(X\right)+V\left(Y\right)$

L'énoncé nous indique que les variables aléatoires sont indépendantes, on peut donc utiliser la formule précédente.

En écrivant $M_n=\dfrac{1}{n}X_1+\dfrac{1}{n}X_2+...+\dfrac{1}{n}X_n$, on a alors $V(M_n) = \frac{1}{n^2}V(X_1) + \frac{1}{n^2}V(X_2) + \ldots + \frac{1}{n^2}V(X_n) = \frac{1}{n^2} \times nV(X) = \frac{1}{n}V(X)$

Résultat

Finalement, on trouve :
$E(M_n) = 8,1$ et $V(M_n) = \frac{7,2252}{n}$

2) On reconnaît l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Rappel

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev :
Pour une variable aléatoire X et $a > 0$, $\mathrm{P}(|X - E(X)| \geqslant a) \leqslant \frac{V(X)}{a^2}$

Avec $a = 2$ et la question précédente, $\mathrm{P}(|X - M_n(X)| \geqslant 2) \leqslant \frac{7,2252}{4n} = \frac{1,8063}{n}$

Résultat

Donc $\mathrm{P}(|X - M_n(X)| \geqslant 2) \leqslant \frac{1,8063}{n}$

3)

Attention

Les inégalités sont inversées par rapport à la question précédente !

Avec les inégalités dans ce sens, l'inégalité devient : $\mathrm{P}(|X - M_n(X)| < 2) \geqslant 1 - \frac{1,8063}{n}$

On cherche donc n tel que $1 - \frac{1,8063}{n} \geqslant 0,95$

Or $1 - \frac{1,8063}{n} = \frac{n - 1,8063}{n}$

Donc $1 - \frac{1,8063}{n} \geqslant 0,95 \Leftrightarrow n - 1,8063 \geqslant 0,95n$

D'où $n - 0,95n \geqslant 1,8063$ ou encore $0,05n \geqslant 1,8063$

Finalement, on trouve $n \geqslant \frac{1,8063}{0,05} = 36,126$

n étant un entier,

Résultat

On conclut que $\mathrm{P}(|X - M_n(X)| < 2) \geqslant 0,95$ pour $n \geqslant 37$
Cela signifie qu'à partir de 37 compétitions, la moyenne des épées non conformes sera situées entre 6 et 10 dans 95% des cas.

Exercice 2

1)

$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 4\mathrm{e}^{-x} + \cos(x) + \sin(x)$

f est bien définie et dérivables sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions qui le sont et $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = -4\mathrm{e}^{-x} - \sin(x) + \cos(x)$

Donc $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) + f(x) = -4\mathrm{e}^{-x} - \sin(x) + \cos(x) + 4\mathrm{e}^{-x} + \cos(x) + \sin(x) = 2\cos(x)$

Cela confirme que f est solution de (E)

Résultat

L'affirmation 1 est vraie.

2) Les points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ sont déterminés par les x pour lesquels $f(x) = g(x)$.

Posons $\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = f(x) - g(x)$

h est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions qui le sont et

$\forall x \in \mathbb{R},\ h'(x) = f'(x) - g'(x) = 2 - \cos(x) > 0$

Donc h est strictement croissante.

De plus, $h(0) = 0$

Ainsi, $\forall x < 0,\ h(x) < 0$ et $\forall x > 0,\ h(x) > 0$

Autrement dit, $f(0) = g(0)$

$\forall x < 0,\ f(x) < g(x)$ et $\forall x > 0,\ f(x) > g(x)$

Et donc $\forall x \neq 0,\ f(x) \neq g(x)$

ou $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ ont un seul point d'intersection.

Résultat

L'affirmation 2 est vraie.

3)

$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \dfrac{2n + \sin(n)}{n+1}$

On peut écrire $v_n = \dfrac{2n + 2 - 2 + \sin(n)}{n+1} = \dfrac{2n+2}{n+1} + \dfrac{-2 + \sin(n)}{n+1} = 2 + \dfrac{-2 + \sin(n)}{n+1}$

Or, $\forall n \in \mathbb{N},\ -3 \leqslant -2 + \sin(n) \leqslant -1$ donc

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{-2 + \sin(n)}{n+1} = 0$$

Ainsi, $\lim_{n \to +\infty} v_n = 2$ et (v_n) converge.

Résultat

L'affirmation 3 est fausse.

4) Procédons par récurrence pour cette question.

Initialisation : $u_1 = 1 = 1^2$

La proposition est vraie au rang 1.

hérédité : Supposons que la proposéition soit vraie au rang n, soit $u_n = n^2$ et étudions le rang $n+1$

$u_{n+1} = u_n + 2n + 1 = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$

Donc la proposition reste vrai au rang $n+1$.

Résultat

L'affirmation 4 est vraie.

5)

Remarque

Pour cette question, on va utiliser des opérations très classiques sur l'exponentielle, à bien maîtriser donc.

Regardons plus en détails le terme général de la suite :

$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \mathrm{e}^{-n} = \left(\mathrm{e}^{-1}\right)^n = \left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)^n$

et on remarque que (u_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{\mathrm{e}} < 1$

On peut donc utiliser la formule du cours pour calculer la valeur de S_n

On a $\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n = \left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)^1 + \left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)^2 + ... + \left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)^n = \dfrac{1 - \left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)^n}{1 - \dfrac{1}{\mathrm{e}}}$

Quand $n \to +\infty$, $\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)^n \to 0$ et donc $S_n \to \dfrac{1}{1 - \dfrac{1}{\mathrm{e}}}$

De plus, $\dfrac{1}{1 - \dfrac{1}{\mathrm{e}}} = \dfrac{\mathrm{e}}{\mathrm{e} - 1}$

Donc finalement,

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e} - 1}$$

Résultat

L'affirmation 5 est vraie.

Exercice 3

Attention

L'ordre des cordonnées n'est pas forcément naturel (si tant est qu'il puisse l'être), j'aurais plutôt inversé $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AD}$.

1) Dans le référentiel choisi, toutes les coordonnées sont comprises entre 0 et 1, je pense que la lecture graphique suffit, on ne va pas se lancer dans les formules de coordonnées des milieux.

Résultat

On trouve les coordonnées $I\left(\frac{1}{2};0;1\right)$, $J\left(0;\frac{1}{2};1\right)$ et $K\left(0;0;\frac{1}{2}\right)$.

2.a)

Rappel

Je le mentionne rapidement, quand l'origine du vecteur est l'origine du repère, les coordonnées du vecteur sont celles de l'extrémité.

On a donc $\overrightarrow{AI}\left(\frac{1}{2};0;1\right)$ et $\overrightarrow{AJ}\left(0;\frac{1}{2};1\right)$

Ainsi $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{2} \times 0 + 0 \times \frac{1}{2} + 1 \times 1 = 1$

Résultat

Et donc $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AJ} = 1$

2.b)

On a de façon assez évidente $\|\overrightarrow{AI}\| = \|\overrightarrow{AJ}\|$

De plus $\|\overrightarrow{AI}\|^2 = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4}$, d'où $\|\overrightarrow{AI}\| = \|\overrightarrow{AJ}\| = \frac{\sqrt{5}}{2}$

Par ailleurs, on a la formule $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AJ} = \|\overrightarrow{AI}\| \times \|\overrightarrow{AJ}\| \times \cos\left(\widehat{IAJ}\right)$

Et donc $\frac{5}{4}\cos\left(\widehat{IAJ}\right) = 1$ ou encore $\cos\left(\widehat{IAJ}\right) = \frac{4}{5}$

Finalement, $\widehat{IAJ} = \arccos\left(\frac{4}{5}\right) \approx 36,9$

Résultat

Donc $\widehat{IAJ} \approx 36,9$

3.a)

C a pour coordonnées $C\left(1;1;0\right)$ et donc $\overrightarrow{KC}\left(1;1;-\frac{1}{2}\right)$

Rappel

Un vecteur est normal à un plan s'il est orthogonal à tous les vecteurs (non nuls) du plan.
Pour le démontrer, il suffit que le vecteur considéré soit orthogonal à 2 vecteurs non colinéaires du plan.

On calcule rapidement :

$\overrightarrow{KC}.\overrightarrow{AI} = 1 \times \frac{1}{2} + 1 \times 0 + \left(-\frac{1}{2}\right) \times 1 = 0$

et $\overrightarrow{KC}.\overrightarrow{AI} = 1 \times 0 + 1 \times \frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right) \times 1 = 0$

Donc $\overrightarrow{KC} \perp \overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{KC} \perp \overrightarrow{AJ}$

Résultat

Donc $\overrightarrow{KC}$ est bien orthogonal au plan (AIJ)

3.b)

Comme $\overrightarrow{KC}$ est bien orthogonal à (AIJ), on sait que :

$\exists d \in \mathbb{R},\ M\left(x;y;z\right) \in (AIJ) \Leftrightarrow x + y - \frac{1}{2}z + d = 0$

Comme $A \in (AIJ)$, on trouve immédiatement $d = 0$

Résultat

Donc une équation cartésienne de (AIJ) est $x + y - \frac{1}{2}z = 0$

4.a)

Soit $L\left(x_L; y_L; z_L\right)$ le projeté orthogonal de C sur (AIJ).

Donc L vérifie l'équation cartésienne de (AIJ) trouvée à la question précédente et $x_L + y_L - \frac{1}{2}z_L = 0$

Par ailleurs, $\overrightarrow{KC}$ est colinéaire à $\overrightarrow{LC}$, donc il exsite un réel k tel que $\overrightarrow{LC} = k\overrightarrow{KC}$.

On doit donc résoudre le système :

$$\begin{cases} x_L + y_L - \frac{1}{2}z_L = 0 \\ x_L - 1 = k \\ y_L - 1 = k \\ z_L = -\frac{k}{2} \end{cases}$$

On trouve ainsi :

$$\begin{cases} 2x_L + \frac{1}{4}k = 0 \\ x_L = k+1 \\ y_L = x_L \\ z_L = -\frac{k}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_L + \frac{1}{4}(x_L - 1) = 0 \\ x_L = k+1 \\ y_L = x_L \\ z_L = -\frac{k}{2} \end{cases}$$

Isolons la 1ère ligne pour gagner en lisibilité, nous déduirons les autres valeurs ensuite :

$2x_L + \frac{1}{4}(x_L - 1) = 0 \Leftrightarrow 8x_L + x_L - 1 = 0$

$\Leftrightarrow 9x_L = 1$

Et donc $x_L = \frac{1}{9}$.

On en déduit, $y_L = \frac{1}{9}$, $k = x_L - 1 = -\frac{8}{9}$ et enfin $z_L = \frac{8}{18} = \frac{4}{9}$

Résultat

On trouve donc $L\left(\frac{1}{9}; \frac{1}{9}; \frac{4}{9}\right)$

4.a)

La distance de C à (AIJ) est donnée par la norme de $\overrightarrow{LC}$

Or $\overrightarrow{LC}\left(\frac{8}{9}; \frac{8}{9}; -\frac{4}{9}\right)$ (On a déjà vu plusieurs coordonnées de vecteur dans l'exercice, je te laisse vérifier !)

et $\|\overrightarrow{LC}\|^2 = \left(\frac{8}{9}\right)^2 + \left(\frac{8}{9}\right)^2 + \left(\frac{4}{9}\right)^2 = \frac{64+64+16}{81} = \frac{144}{81}$

Remarque

Pour les calculs de distance dans un repère orthonormé, je passe (presque) tout le temps par le carré, pour éviter d'avoir une grosse racine carrée tout le long du calcul !
Ca permet de garder des lignes plus lisibles.

Et finalement $\|\overrightarrow{LC}\| = \sqrt{\frac{144}{81}} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$

Résultat

Donc la distance de C à (AIJ) est de $\frac{4}{3}$

5.a)

$\overrightarrow{IM}$ est un vecteur directeur de (IM) et $\overrightarrow{IM}\left(\frac{1}{2}; m; 0\right)$

Un point $R(x; y; z)$ est sur (IM) si $\overrightarrow{IM}$ et $\overrightarrow{IR}$ sont colinéaires.

Avec $\overrightarrow{IR}\left(x-\frac{1}{2}; y; z-1\right)$, il existe un réel s tel que $\overrightarrow{IR}=s\overrightarrow{IM}$, ce qui donne :

$$\begin{cases} x-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}s \\ y=ms \\ z-1=0 \end{cases}$$

Ou encore $\begin{cases} x=\frac{1}{2}s+\frac{1}{2} \\ y=ms \\ z=1 \end{cases}$

Résultat

Donc, une représentation paramétrique de (IM) est $\begin{cases} x=\frac{1}{2}s+\frac{1}{2} \\ y=ms \\ z=1 \end{cases}$, avec $s \in \mathbb{R}$

5.b)

Rappel

2 droites peuvent être parallèles, sécantes ou non coplanaires.

Nous devons donc vérifier si les droites (IM) et (KC) sont parallèles ou sécantes selon les valeurs de m.

On sait que $\overrightarrow{IM}\left(\frac{1}{2}; m; 0\right)$ et $\overrightarrow{KC}\left(1; 1; -\frac{1}{2}\right)$. Compte-tenu de la coordonnées en "z", les 2 vecteurs ne peuvent être colinéaires et donc les droites ne peuvent pas être parallèles.

Il faut donc chercher un point d'intersection éventuel.
En utilisant la même méthode, on trouve une équation paramétrique de (KC)

$$\begin{cases} x=t \\ y=t \\ z=-\frac{1}{2}t+\frac{1}{2} \end{cases}$$

Un point d'intersection $(x; y; z)$ devra vérifier les 2 équations et donc :

$$\begin{cases} \frac{1}{2}s+\frac{1}{2}=t \\ ms=t \\ 1=-\frac{1}{2}t+\frac{1}{2} \end{cases}$$

La dernière ligne donne $t=-1$.
En remplaçant dans la 1ère, on obtient, $\frac{1}{2}s+\frac{1}{2}=-1$
d'où $\frac{1}{2}s=-\frac{3}{2}$ et $s=-3$
Finalement, la ligne du milieu devient, $-3m=-1$ et $m=\frac{1}{3}$

Résultat

Donc, (IM) et (KC) sont coplanaires uniquement pour $m = \frac{1}{3}$.

Exercice 4

Remarque

Je me rends compte (après coup donc) que je n'ai pas mis beaucoup de rappel pour cet exercice.
Les exercices d'analyse au bac sont toujours assez semblables et il me semble que les calculs détaillés suffisent. N'hésite pas à me dire si tu as des questions ou si tu penses que certains ajouts pourraient être intéressants !

PARTIE A

1.a) Quand $x \to 0_+$, $\ln(x) \to -\infty$ et $x^2 \to 0_+$
Et donc $f(x) \to -\infty$

Quand $x \to +\infty$, $\ln(x) \to +\infty$ et $x^2 \to +\infty$. Nous sommes donc face à une forme indéterminée "$\frac{+\infty}{+\infty}$".

Mais par croissance comparée, on sait que $f(x) \to 0$.

Résultat

Donc, $\lim_{x\to 0_+} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$

1.b)

Résultat

Graphiquement, la courbe $\mathcal{C}_f$ possède une asymptote verticale en 0 (l'axe des ordonnées) et une asymptote horizontale en $+\infty$ (l'axe des abscisses).

2) On admet que la fonction est 2 fois dérivable. Bon. Notons tant qu'à être là que c'est la cas car f et f' sont des quotients de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas sur l'intervalle de définition.

$$\forall x \in \left]0; +\infty\right[,\ f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x^2 - 2x\ln(x)}{x^4} = \frac{x - 2x\ln(x)}{x^4} = \frac{1 - 2\ln(x)}{x^3}$$

Résultat

On confirme que $\forall x \in \left]0; +\infty\right[,\ f'(x) = \frac{1 - 2\ln(x)}{x^3}$.

3)

Sur $]0;+\infty[$, $x>0$ et donc $x^3>0$

Donc f' est du signe de $1-2\ln(x)$, que nous noterons $g(x)$

g est dérivable sur $]0;+\infty[$ et $\forall x\in[0;+\infty],g'(x)=-\dfrac{2}{x}<0$

Donc g est strictement décroissante et s'annule pour $1-2\ln(x)=0$,
C'est à dire $2\ln(x)=1$ ou $x=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\mathrm{e}}$

On tire de cela que f a un maximum en $x=\sqrt{\mathrm{e}}$ qui vaut $f\left(\sqrt{\mathrm{e}}\right)=\dfrac{\ln\left(\sqrt{\mathrm{e}}\right)}{\left(\sqrt{\mathrm{e}}\right)^2}=\dfrac{1}{2\mathrm{e}}$

L'ensemble des éléments donne le tableau suivant :

Résultat

x	0		$\sqrt{\mathrm{e}}$		$+\infty$
$f'(x)$	$\|$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\|$ $-\infty$	$\nearrow$	$\dfrac{1}{2\mathrm{e}}$	$\searrow$	0

4)

Pour $x=1$, on a $f(1)=\dfrac{\ln(1)}{(1)^2}=0$ et $f'(1)=\dfrac{1-2\ln(1)}{1^3}=1$

De plus, une équation de la tangente Δ à $\mathcal{C}_f$ en 1 est $y=f'(1)(x-1)+f(1)=x-1$

Résultat

Donc l'équation réduite de Δ est $y=x-1$

5) On a déjà évoqué que la fonction f est 2 fois dérivable, je n'y reviens donc pas.

On trouve, $\forall x\in\,]0;+\infty[\,,\ f''(x)=\dfrac{\frac{-2}{x}x^3-3x^2(1-2\ln(x))}{x^6}=\dfrac{-2x^2-3x^2+6x^2\ln(x)}{x^6}$

$=\dfrac{-5x^2+6x^2\ln(x)}{x^6}=\dfrac{-5+6\ln(x)}{x^4}$

Résultat

Ce qui confirme bien que $f''(x)=\dfrac{-5+6\ln(x)}{x^4}$

6.a) Pour étudier la convexité, on étudie le signe de f''.

Sur le même principe que pour f', on sait que $x^4>0$ et donc $f''(x)$ est du signe de $-5+6\ln(x)$ que l'on notera $h(x)$.

$\forall x\in\,]0;+\infty[\,,\ h'(x)=\dfrac{6}{x}>0$

Les limites de h sont celles de ln et s'annule pour $6\ln(x) = 5$ donc $x = \mathrm{e}^{\frac{5}{6}}$

Donc f'' est négative sur $\left]0; \mathrm{e}^{\frac{5}{6}}\right]$ et positive sur $\left[\mathrm{e}^{\frac{5}{6}}; +\infty\right[$.

Résultat

Donc f est concave sur $\left]0; \mathrm{e}^{\frac{5}{6}}\right]$ puis convexe sur $\left[\mathrm{e}^{\frac{5}{6}}; +\infty\right[$ avec un point d'inflexion en $\left(\mathrm{e}^{\frac{5}{6}}; \dfrac{5}{6\mathrm{e}^{\frac{5}{3}}}\right)$

6.b)

Notons que $\mathrm{e}^{\frac{5}{6}} \approx 2,3 > 1$.

Comme f est concave sur f est concave sur $\left]0; \mathrm{e}^{\frac{5}{6}}\right]$, sa courbe représentative se situe en dessous de ses tangentes.

En utilisant le résultant de la question 4,

Résultat

On conclut que $\forall x \in \left]0; \mathrm{e}^{\frac{5}{6}}\right],\ x - 1 \geqslant \dfrac{\ln(x)}{x^2}$.

7)

Notons que $\sqrt{\mathrm{e}} < \mathrm{e}^{\frac{5}{6}}$ et donc f est décroissante sur $\left[\mathrm{e}^{\frac{5}{6}}; +\infty\right[$.

Comme $x \mapsto x - 1$ est, elle, croissante sur $\mathbb{R}$,

Résultat

On peut affirmer qu'on a également $\forall x \in \left[\mathrm{e}^{\frac{5}{6}}; +\infty\right[,\ x - 1 \geqslant \dfrac{\ln(x)}{x^2}$.

PARTIE B

1)

Pour $x \geqslant 1$, $f(x) \geqslant 0$.

Résultat

I_n représente l'aire "sous la courbe" $\mathcal{C}_f$, autrement dit, l'aire de la portion du plan délimitée par l'axe des abscisses, $\mathcal{C}_f$, les axes $x = 1$ et $x = n$.

2) Nous allons utiliser la linéarité de l'intégrale.

$$I_{n+1} - I_n = \int_1^{n+1} \frac{\ln(x)}{x^2}\mathrm{d}x - \int_1^{n} \frac{\ln(x)}{x^2}\mathrm{d}x = \int_1^{n} \frac{\ln(x)}{x^2}\mathrm{d}x + \int_n^{n+1} \frac{\ln(x)}{x^2}\mathrm{d}x - \int_1^{n} \frac{\ln(x)}{x^2}\mathrm{d}x$$

Donc,

$$I_{n+1} - I_n = \int_n^{n+1} \frac{\ln(x)}{x^2} \mathrm{d}x$$

Et comme f est positive pour $x \geqslant 1$, on a $I_{n+1} - I_n \geqslant 0$

Résultat

Donc la suite (I_n) est croissante.

3) La hauteur des rectangles vaut $f(n)$.

Résultat

On complète la ligne : S = S + (log(i) / i ** 2)

4)

Nous allons procéder, de façon assez surprenante (!), à une intégration par partie.

En reprenant les notations "habituelles" du cours (j'espère que c'est celles que tu as utilisées également !), on choisit :

$u(x) = \ln(x)$, d'où $u'(x) = \dfrac{1}{x}$

et $v'(x) = \dfrac{1}{x^2}$ et donc $v(x) = -\dfrac{1}{x}$

Cela nous donne :

$$I_n = \int_1^n \frac{\ln(x)}{x^2} \mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{x} \ln(x) \right]_1^n - \int_1^n -\frac{1}{x} \times \frac{1}{x} \mathrm{d}x = -\frac{\ln(n)}{n} + \int_1^n \frac{1}{x^2} \mathrm{d}x$$

$$= -\frac{\ln(n)}{n} + \left[-\frac{1}{x} \right]_1^n = -\frac{\ln(n)}{n} - \frac{1}{n} + 1 = \frac{n - 1 - \ln(n)}{n}$$

Résultat

Donc on trouve bien $I_n = \dfrac{n - 1 - \ln(n)}{n}$

5)

On peut écrire $I_n = \dfrac{n - 1 - \ln(n)}{n} = 1 - \dfrac{1 + \ln(n)}{n}$

Et, par croissance comparée, on sait que

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1 + \ln(n)}{n} = 0$$

Résultat

On conclut, pour finir le sujet, que

$$\lim_{n \to +\infty} I_n = 1$$