المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية والتعليم الأولي والرياضة
المركز الوطني للامتحانات المدرسية وتقييم التعلمات

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا

- الدورة العادية 2026 -

المسالك الدولية

الموضوع			NS 24F
المادة	الرياضيات	مدة الإنجاز	4س
الشعبة والمسلك	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب) (خيار فرنسية)	المعامل	9

CONSIGNES :

- La durée de l'épreuve est de 4 heures.
- L'épreuve comporte quatre exercices indépendants.
- Les exercices peuvent être traités selon l'ordre choisi par le candidat.

- L'EXERCICE1 se rapporte à l'analyse ……….……….……….(10 pts)
- L'EXERCICE2 se rapporte aux nombres complexes.....……….(3.5 pts)
- L'EXERCICE3 se rapporte à l'arithmétique et aux probabilités...(3 pts)
- L'EXERCICE4 se rapporte aux structures algébriques............(3.5 pts)

L'usage d'une calculatrice non programmable est autorisé

L'usage de la couleur rouge n'est pas autorisé

EXERCICE1 : (10 points)

Partie I :

0.25 pt	1- a) Montrer que: $\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ 1+x \leq e^{x}$
0.25 pt	1- b) En déduire que : $\forall x \in [0,+\infty[\ ,\ \dfrac{x^2}{2}+1+x \leq e^{x}$

2- Pour tout $x \in [0\ ,\ +\infty[$, on pose $I(x) = \int_0^x te^{-t}dt$

0.25 pt	2- a) Montrer que : $\forall x \in [0\ ,\ +\infty[\ ,\ I(x) \leq \dfrac{x^2}{2}$
0.5 pt	2- b) Montrer que : $\forall x \in [0\ ,\ +\infty\ [\ ,\ I(x) = -xe^{-x} - e^{-x} + 1$

3- Soit g la fonction numérique de la variable réelle x définie sur $]0\ ,\ +\infty\ [$ par :

$$g(x) = \frac{e^{x} - x - 1}{x^2}$$

0.5 pt	3-a)En utilisant les résultats des questions **1- b)** et **2- b)** de la partie **I**, montrer que : $\forall x \in]0\ ,\ +\infty\ [\ ,\ \dfrac{1}{2} \leq g(x) \leq \dfrac{e^{x}}{2}$
0,25 pt	3- b) En déduire que : $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = \dfrac{1}{2}$

Partie II :

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie sur $[0,+\infty[$ par :

$$\forall x \in]0\,,\,+\infty[;\; f(x)=\frac{x}{e^{x}-e^{-x}} \quad \text{et} \quad f(0)=\frac{1}{2}$$

Soit (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

0.5 pt	1- Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

0.25 pt	2- Montrer que f est continue à droite en 0

0.25 pt	3- a) Montrer que: $\forall x \in]0\,,\,+\infty[,\ \dfrac{f(x)-f(0)}{x}=-e^{-x}f(x)\left(\dfrac{e^{2x}-2xe^{x}-1}{2x^{2}}\right)$

0.25 pt	3- b) Montrer que: $\forall x \in]0\,,\,+\infty[\,,\ \dfrac{e^{2x}-2xe^{x}-1}{2x^{2}}=2g(2x)-\dfrac{e^{x}-1}{x}$

0.25 pt	3- c) En déduire que f est dérivable à droite en 0 et que $f'_d(0)=0$

4- Pour tout $x \in [0\,,\,+\infty[$, on pose $J(x)=\displaystyle\int_0^x te^{t}dt$

0.5 pt	4- a) Montrer que pour tout $x \in [0,+\infty[\,,\ 0 \le I(x) \le J(x)$

0.25 pt	4- b) Montrer que pour tout $x \in [0, +\infty[$, $J(x) = (x-1)e^x + 1$	
0.5 pt	4- c) Montrer que pour tout $x \in]0, +\infty[$, on a : $$f'(x) = \frac{I(x) - J(x)}{(e^x - e^{-x})^2}$$	
0.25 pt	4- d) En déduire le sens de variation de la fonction f sur $[0, +\infty[$	
0.25 pt	5- Montrer que la fonction f réalise une bijection de $[0, +\infty[$ vers un intervalle à déterminer. On note f^{-1} la bijection réciproque de la fonction f	
0.5 pt	6- a) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α à déterminer dans $[0, +\infty[$	
0.5 pt	6-b) Représenter graphiquement la courbe (C) et la courbe (C') de la fonction f^{-1} dans le repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ (On prendra $\left\lVert\vec{i}\right\rVert = \left\lVert\vec{j}\right\rVert = 2\,cm$). (On admet que le point $P(x_0, f(x_0))$ est un point d'inflexion pour la courbe (C) avec $x_0 \simeq 1,6$ et $f(x_0) \simeq 0,3$)	

7- On considère la suite numérique $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par : $u_0 = 0$ et $(\forall n \in \mathbb{N}), u_{n+1} = f(u_n)$

0.25 pt	7-a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}),\ 0 \leq u_n \leq \dfrac{1}{2}$
0.5 pt	7-b) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$, $\lvert u_{n+1} - \alpha \rvert \leq \dfrac{1}{2} \lvert u_n - \alpha \rvert$ (On admet que $\forall x \in]0, +\infty[$, $-\dfrac{1}{2} < f'(x) < 0$)
0.5 pt	7- c) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})$, $\lvert u_n - \alpha \rvert \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$
0.25 pt	7- d) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α

Partie III :

On considère la fonction F définie sur $[0, +\infty[$ par : $F(x) = \displaystyle\int_x^{2x} f(t)\,dt$.

0.5 pt	1- a) Montrer que : $\forall x \in [0, +\infty[$; $0 \leq F(x) \leq x f(x)$
0.25 pt	1- b) En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$

0.25 pt	1-c) Interpréter graphiquement le résultat obtenu.
0.25 pt	2- a) Montrer que F est dérivable sur $[0\,,\,+\infty\,[$
0.5 pt	2- b) Montrer que : $\forall x \in [0,+\infty\,[\,,\ F'(x) = \dfrac{-f(x)}{e^{2x}+1}\left(e^{2x}-4e^{x}+1\right)$
0.5 pt	2- c) Montrer que $F\left(\ln\left(2+\sqrt{3}\right)\right)$ est un extremum de la fonction F sur $[0\,,\,+\infty\,[$

EXERCICE2 : (3.5 points)

Soit le nombre complexe $m=\sqrt{2}e^{i\theta}$ où $\theta \in \mathbb{R}-\{k\pi/k\in\mathbb{Z}\}$

Partie I :

On considère dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation (E_m) d'inconnue z

$$(E_m)\ :\ \overline{m}\,z^2-2z+m=0$$

0.25 pt	1- Étant donné que le nombre complexe $z_1=\dfrac{m(1-i)}{2}$ est une solution de l'équation (E_m), déduire que sa deuxième solution est : $z_2=\dfrac{m(1+i)}{2}$
0.25 pt	2- Écrire z_1 sous forme exponentielle.

Partie II :

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B, M, M_1 et M_2 d'affixes respectives $a = 1$, $b = -1$, m, z_1 et z_2

Soit R la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$

0.25 pt	1- Montrer que : $R(M_1) = M_2$	

0.5 pt	2-a) Montrer que $(MM_1)\perp(OM_1)$ et $(MM_2)\perp(OM_2)$	

0.25 pt	2-b) Vérifier que : $OM_1 = OM_2 = 1$	

0.25 pt	2- c) Déterminer la nature du quadrilatère OM_1MM_2	

3- Soit H le point d'affixe $h = \dfrac{-i}{\sqrt{2}\sin(\theta)}e^{i\,(2\theta)}$

Pour tout nombre complexe z, on désigne par $\mathrm{Re}(z)$ la partie réelle de z

0.5 pt	3-a) Montrer que $\mathrm{Re}(m-h) = 0$ et que $\mathrm{Re}\left(1 - h\,\overline{m}\right) = 0$	

0.25 pt	3- b) Montrer que : $\mathrm{Re}\left(\dfrac{a-h}{m+1}\right) = 0$	

0.5 pt	3- c) En déduire que $(MH)\perp(AB)$ et que $(AH)\perp(MB)$	

0.25 pt	4-a) Montrer que : $\dfrac{h-z_1}{z_2-z_1}=\dfrac{1}{2}(1-\text{cotan}(\theta))$	

0.25 pt	4-b) En déduire que les points H, M_1 et M_2 sont alignés.	

EXERCICE3 : (3 points)

Partie I :

A. On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation suivante (F) : $5u-9v=1$

0.25 pt	1- Donner une solution particulière (u_0,v_0) dans $\mathbb{N}^2$ de (F)	

0.25 pt	2- Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation (F)	

0.25 pt	3- Vérifier que : $5^{u_0}\equiv 6\,[19]$	

B. On considère dans $\mathbb{Z}$ l'équation suivante (E) : $x^{2026} \equiv 5\,[19]$

1- Soit x une solution de l'équation (E)

0.5 pt	1- a) Montrer que x et 19 sont premiers entre eux et que $x^{18} \equiv 1\,[19]$	
0.25 pt	1- b) Montrer que : $x^{10} \equiv 5\,[19]$	
0.25 pt	1- c) En déduire que : $x^2 \equiv 6\,[19]$ (On pourra utiliser les résultats de la partie **A**)	
0.25 pt	1- d) Montrer que $x \equiv 5\ [19]$ ou $x \equiv -5\ [19]$	
0.5 pt	2- Montrer que si $x \equiv 5\ [19]$ ou $x \equiv -5\ [19]$ alors x est solution de l'équation (E)	

Partie II :

On considère une urne contenant 100 boules numérotées de 1 à 100 indiscernables au toucher.

On tire une boule au hasard de cette urne.

On considère l'événement V : « Le numéro de la boule tirée est solution de l'équation (E) »

0.25 pt	1- Montrer que la probabilité de l'événement V est $p = 0,11$	

0.25 pt	2- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On effectue n tirages successifs avec remise de la boule dans l'urne. Déterminer la valeur minimale de n pour que la probabilité de "**réalisation de l'événement V au moins une fois**", soit strictement supérieure à $0,95$	

EXERCICE4 : (3.5 points)

On rappelle que $(M_3(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau unitaire et non commutatif de zéro la matrice $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et d'unité la matrice $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On considère l'ensemble : $E = \left\{ M(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x^2 & 1-x & x \\ x^2+2x & -x & x+1 \end{pmatrix} \ / \ x \in \mathbb{R} \right\}$

0.5 pt	1- Montrer que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ M(x) \times M(y) = M(x+y)$	

2- On considère l'application φ définie de $\mathbb{R}$ vers $M_3(\mathbb{R})$ par : $(\forall x \in \mathbb{R}) \ ; \ \varphi(x) = M(x)$

0.5 pt	2- a) Montrer que φ est un homomorphisme de $(\mathbb{R}, +)$ vers $(M_3(\mathbb{R}), \times)$ et que $\varphi(\mathbb{R}) = E$	

0.25 pt	2- b) En déduire que $(E, \times)$ est un groupe commutatif.	

3- On munit E de la loi de composition interne T définie par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ M(x) \, T \, M(y) = M(2xy).$$

0.75 pt	3- a) Montrer que $(E - \{I\}, T)$ est un groupe commutatif.	

0.5 pt	3- b) Montrer que $(E, \times, T)$ est un corps commutatif.

4- Soit $x \in \mathbb{R}$ .On pose : $(M(x))^n = \underbrace{M(x) \times .... \times M(x)}_{n fois}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$

0.5 pt	4- a) Montrer que: $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$, $(M(x))^n = M(nx)$

0.5 pt	4- b) Résoudre dans E l'équation : $X^3 - X^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

FIN