BAC 2026 - Maroc

Sujet SM - Corrigé - antoine.remond.maths@gmail.com

Exercice 1

PARTIE I

1.a)

La fonction exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$, car sa dérivée seconde (qui est égale à elle-même) est strictement positive.

Cela implique que la courbe représentative est au-dessus de ses tangentes. En particulier de sa tangente en 0.

Comme $\exp(0) = \exp'(0) = 1$, on déduit que que l'équation réduite de sa tangente en 0 est $y = x + 1$

Résultat

Donc $\forall x \in \mathbb{R},\ 1 + x \leqslant \mathrm{e}^x$

1.b)

Notons f la fonction définie par $\forall x \in [0; +\infty[\,,\ f(x) = \dfrac{x^2}{2} + x$
f est une fonction polynomiale donc dérivable sur $[0; +\infty[$ et $f'(x) = x + 1$

D'après la question précédente, on a donc $\forall x \in [0; +\infty[\,,\ 1 + x \leqslant \exp'(x) = \mathrm{e}^x$
De plus, f et exp sont strictement positive sur $\forall x \in [0; +\infty[$ et $f(0) = 0 < \mathrm{e}^0 = 1$
On peut donc intégrer l'inégalité précédente pour obtenir :

$$\int_0^x 1 + t\mathrm{d}t \leqslant \int_0^x \mathrm{e}^t\mathrm{d}t$$

Or

$$\int_0^x 1 + t\mathrm{d}t = \left[\frac{t^2}{2} + t\right]_0^x = \frac{x^2}{2} + x$$

Et

$$\int_0^x \mathrm{e}^t\mathrm{d}x = \left[\mathrm{e}^t\right]_0^x = \mathrm{e}^x - 1$$

Ce qui nous donne $\dfrac{x^2}{2} + x \leqslant \mathrm{e}^x - 1$

Résultat

Et finalement $\forall x \in [0; +\infty[\,,\ \dfrac{x^2}{2} + x + 1 \leqslant \mathrm{e}^x$

2.a)

On sait que $\forall x \in [0;+\infty[\,,\ \mathrm{e}^{x} \leqslant 1$

Ce qui implique tout de suite le résultat :

$$\forall x \in [0;+\infty[\,,\ I(x) \leqslant \int_0^x t\mathrm{d}t = \frac{x^2}{2}$$

Résultat

Donc $\forall x \in [0;+\infty[\,,\ I(x) \leqslant \dfrac{x^2}{2}$

2.b) Vu la forme de la fonction a intégrer, on va procéder naturellement à une intégration par parties.

$$\forall x \in [0;+\infty[\,,\ I(x)\,,\ \int_0^x t\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = \left[-t\mathrm{e}^{-t}\right]_0^x + \int_0^x \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = -x\mathrm{e}^{-x} - \left[\mathrm{e}^{-t}\right]_0^x = -x\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-x} + 1$$

Résultat

Donc $\forall x \in [0;+\infty[\,,\ I(x) = -x\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-x} + 1$

3.a)

A partir de la question 1.b, on déduit que $\forall x \in]0;+\infty[\,,\ \dfrac{x^2}{2} \leqslant \mathrm{e}^{-x} - x - 1$

Et comme $x^2 > 0$, $\dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{\mathrm{e}^{-x} - x - 1}{x^2}$

En utilisant maintenant le questions 2.a et 2.b, on trouve :

$\forall x \in]0;+\infty[\,,\ -x\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-x} + 1 \leqslant \dfrac{x^2}{2}$

En multipliant cette inégalité par $\dfrac{\mathrm{e}^{x}}{x^2} > 0$, on trouve bien : $\dfrac{\mathrm{e}^{-x} - x - 1}{x^2} \leqslant \dfrac{x^2}{2}$

Résultat

On conclut donc que $\forall x \in]0;+\infty[\,,\ \dfrac{1}{2} \leqslant g(x) \leqslant \dfrac{x^2}{2}$

3.b)

Le résultat est immédiat avec le théorème d'encadrement (et $\mathrm{e}^0 = 1$)

Résultat

Donc

$$\lim_{x\to 0_+} g(x) = \frac{1}{2}$$

PARTIE II

1)

Quand $x \to +\infty$, $\mathrm{e}^x \to +\infty$ et $\mathrm{e}^{-x} \to 0$
Et par croissance comparée, $\dfrac{x}{\mathrm{e}^x} \to 0$

Résultat

Donc

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

Graphiquement, l'axe des abscisses est une asymptote horizontale à (C)

2)

considérons la fonction h définie par $\forall x \in [0; +\infty[\,,\ g(x) = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}$.
h est dérivable sur $[0; +\infty[$ et $\forall x \in [0; +\infty[\,,\ h'(x) = \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}$
Et donc $h'(0) = 2$. On a également $h(0) = 0$.
Or,

$$h'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{h(x) - h(0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{x}$$

Et donc,

$$\lim_{x \to 0_+} f(x) = \frac{1}{h'(0)} = \frac{1}{2}$$

Résultat

Donc f est bien continue à droite en 0

3.a)

$\forall x \in]0; +\infty[\,,\ \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = \dfrac{\frac{x}{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}} - \frac{1}{2}}{x} = \dfrac{2x - \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2x\left(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}\right)} = \dfrac{x}{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}} \times \dfrac{2x - \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2x^2} =$
$\mathrm{e}^{-x} f(x) \dfrac{2x\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{2x} + 1}{2x^2}$

Résultat

Et donc $\dfrac{f(x) - f(0)}{x} = -\mathrm{e}^{-x} f(x) \dfrac{\mathrm{e}^{2x} - 2x\mathrm{e}^{-x} - 1}{2x^2}$

3.b)

$\forall x \in]0; +\infty[\,,\ 2g(2x) - \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = \dfrac{\mathrm{e}^{2x} - 2x - 1}{2x^2} - \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = \dfrac{\mathrm{e}^{2x} - 2x - 1 - 2x\mathrm{e}^x + 2x}{2x^2}$
$= \dfrac{\mathrm{e}^{2x} - 2x\mathrm{e}^{-x} - 1}{2x^2}$

Résultat

Donc $\forall x \in]0; +\infty[\,,\ \dfrac{\mathrm{e}^{2x} - 2x\mathrm{e}^{-x} - 1}{2x^2} = 2g(2x) - \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x}$

3.c)

Reprenons les résultats précédents :

$$\frac{f(x)-f(0)}{x} = -\mathrm{e}^{-x} f(x) \times \left(2g(2x) - \frac{\mathrm{e}^{x}-1}{x}\right) = -\mathrm{e}^{-x} f(x) \times 2g(2x) + \mathrm{e}^{-x} f(x) \frac{\mathrm{e}^{x}-1}{x}$$

$$= -\mathrm{e}^{-x} f(x) \times 2g(2x) + f(x) \frac{1-\mathrm{e}^{-x}}{x}$$

en remarquant que :

$$\lim_{x \to 0_+} \frac{1-\mathrm{e}^{-x}}{x} = -\exp'(0) = 1$$

Et en utilisant les limites déjà calculées dans les questions précédentes,

$$\lim_{x \to 0_+} -\mathrm{e}^{-x} f(x) \times 2g(2x) = -1 \times \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

Et

$$\lim_{x \to 0_+} f(x) \frac{1-\mathrm{e}^{-x}}{x} = \frac{1}{2}$$

Finalement,

$$\lim_{x \to 0_+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

Résultat

On conclut donc que f est dérivable en 0_+ et $f'_d(0) = 0$

4.a)

Comme, $\forall t \geqslant 0,\ 0 < \mathrm{e}^{-t} \leqslant \mathrm{e}^{t}$

Et comme on intégre des fonctions positives,

Résultat

On déduit immédiatement que $0 \leqslant I(x) \leqslant J(x)$

Remarque

On a même l'inégalité stricte pour $x \neq 0$. Je le glisse là, ça servira peut-être par la suite...

4.b) Procédons, comme tout à l'heure, à une intégration par parties.

$$\forall x \in [0; +\infty[\,,\ \int_0^x t\mathrm{e}^{t}\mathrm{d}t = \left[t\mathrm{e}^{t}\right]_0^x - \int_0^x \mathrm{e}^{t}\mathrm{d}t = x\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{x} + 1$$

Résultat

Et donc

$$\forall x \in [0; +\infty[\,,\ J(x) = (x-1)\,\mathrm{e}^{x} + 1$$

4.c) Etudions la dérivée de f

$\forall x \in \left]0;+\infty\right[,\ f'(x) = \dfrac{e^x - e^{-x} - x\left(e^x + e^{-x}\right)}{\left(e^x - e^{-x}\right)^2} = \dfrac{e^x - xe^x - e^{-x} - xe^{-x}}{\left(e^x - e^{-x}\right)^2}$

Ce qu'on peut réécrire : $\forall x \in \left]0;+\infty\right[,\ f'(x) = \dfrac{-xe^{-x} - e^{-x} + 1 - xe^x + e^x - 1}{\left(e^x - e^{-x}\right)^2}$

Résultat

Et donc, on trouve bien $\forall x \in \left]0;+\infty\right[,\ f'(x) = \dfrac{I(x) - J(x)}{\left(e^x - e^{-x}\right)^2}$

4.d)

Compte-tenu de la question 4.a, on a $\forall x \in \left]0;+\infty\right[,\ f'(x) \leqslant 0$

Résultat

Donc f est décroissante sur $\left[0;+\infty\right[$

5) Comme indiqué dans la remarque, f' est strictement négative sauf en 0. (je ne pense pas qu'il y ait besoin de détailler, sinon préviens-moi)

Et comme on a étudié les limites de f

Résultat

On conclut que f réalise une bijection de $\left[0;+\infty\right[$ vers $\left]0;\dfrac{1}{2}\right]$

6.a)

Assez traditionnellement, on va étudier la fonction k définie sur $\left[0;+\infty\right[$ par $k(x) = f(x) - x$

La fonction k est dérivable sur $\left[0;+\infty\right[$ et $\forall x \in \left[0;+\infty\right[,\ k'(x) = f'(x) - 1 < 0$

De plus, $k(0) = f(0) = \dfrac{1}{2}$ et $\lim_{x\to+\infty} k(x) = -\infty$. (Est-ce que c'est clair ?)

Donc il existe un unique $\alpha \in \left]0;+\infty\right[$ tel que $k(\alpha) = 0$ autrement dit tel que $f(\alpha) = \alpha$

Or $f(x) = x$ s'écrit $\dfrac{x}{e^x - e^{-x}} = x$

Ou, comme $x \neq 0$, $\dfrac{1}{e^x - e^{-x}} = 1$

Ce qui donne $e^x - e^{-x} = 1$

Posons $X = e^x > 0$ et la relation devient $X - \dfrac{1}{X} - 1 = 0$

On multiplie par X et on obtient $X^2 - X - 1 = 0$

Je passe les détails, si tu es arrivé là je suis sûr que tu maîtrises, la solution positive de cette équation est $X = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

Et finalement $\alpha = \ln\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \approx 0,481$

Résultat

Donc, il existe un unique $\alpha = \ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ sur $[0; +\infty[$ tel que $f(\alpha) = \alpha$

6.b)

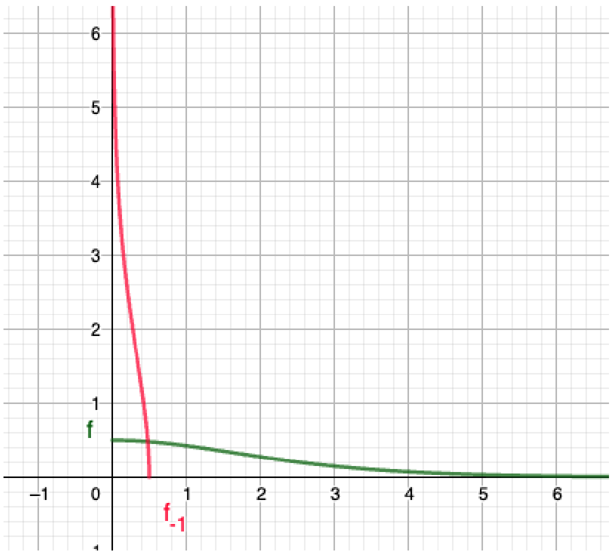

FIGURE 1 – Représentation graphique de f et f^{-1}

7.a) Faisons une récurrence rapide pour démontrer le résultat.

Initialisation : $u_1 = f(u_0) = f(0) = \frac{1}{2}$

Donc $u_1 \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$

Hérédité : Supposons que $u_n \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$

En utilisant les propriétés de f, on trouve bien $u_{n+1} = f(u_n) \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$

Ce qui assure l'hérédité de la propriété.

Résultat

Donc on vérifie bien que $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{2}$

7.b)

D'après l'indication donnée dans l'énoncé, en appliquant l'inégalité des accroissements finis sur l'intervalle $\left[0; \frac{1}{2}\right]$ (on rappelle que α est bien dans cet intervalle).

Cela donne : $\left|\frac{f(u_n) - f(\alpha)}{u_n - \alpha}\right| \leqslant \frac{1}{2}$, tant que $u_n \neq \alpha$ (ce qu'on peut vérifier rapidement également par récurrence par définition (et surtout unicité) de α)

Or $f(u_n) = u_{n+1}$ et $f(\alpha) = \alpha$

Et donc, on déduit que l'inégalité peut s'écrire $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$

Résultat

Donc $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$

7.c) Procédons à la récurrence suggérée

Initialisation : $|u_0 - \alpha| = |\alpha| \leqslant \frac{1}{2}$

Ce qui nous permet de vérifier la propriété au rang 0

Hérédité : Supposons donc qu'au rang n on a bien $|u_n - \alpha| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n$

Etudions le rang $n+1$. Le résultat est assez immédiat d'après la question précédente :

$|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \alpha| \leqslant \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

Ce qui confirme l'hérédité de la propriété.

Résultat

Et finalement $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \alpha| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n$

7.d)

Comme $\frac{1}{2} < 1$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$$

Et donc

$$\lim_{n\to+\infty} |u_n - \alpha| = 0$$

Résultat

Donc (u_n) converge vers α

PARTIE III

1.a)

f est positive et décroissante sur $[0;+\infty[$ et donc $\forall t \in [x;2x], 0 \leqslant f(t) \leqslant f(x)$
Et donc

$$0 \leqslant \int_x^{2x} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_x^{2x} f(x)\,\mathrm{d}t = f(x)\int_x^{2x} 1\mathrm{d}t = xf(x)$$

Résultat

Donc $\forall x \in [0;+\infty[,\ 0 \leqslant F(x) \leqslant xf(x)$

1.b)

$\forall x \in]0;+\infty[,\ xf(x) = \dfrac{x^2}{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}$

Et par croissance comparée,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}} = 0$$

Résultat

Donc d'après le théorème des gendarmes,

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = 0$$

1.c)

Résultat

Graphiquement, l'aire sous la courbe entre x et $2x$ tend vers 0, donc f tend vers 0 en étant très proche de la courbe.

J'avoue que je ne sais pas trop quoi répondre à cette interprétation. Pour l'image, on peut comparer ce résultat avec le comportement de $\dfrac{1}{x}$ pour laquelle ça n'est pas le cas par rapport à $\dfrac{1}{x^2}$ par exemple.

2.a)

F est dérivable d'après le théorème fondamentale de l'analyse.
Si besoin, on peut passer par la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par

$$F_1(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

On a alors $F(x) = F_1(2x) - F_1(x)$

Résultat

Donc F est dérivable sur $[0;+\infty[$

2.b)

En utilisant éventuellement la fonction F_1 introduite précédemment, on a $\forall x \in [0;+\infty[\,,\ F'\left(x\right) = 2f\left(2x\right) - f\left(x\right)$

Ainsi, $F'\left(x\right) = \dfrac{4x}{e^{2x} - e^{-2x}} - \dfrac{x}{e^{x} - e^{-x}}$

Or $\dfrac{4x}{e^{2x} - e^{-2x}} - \dfrac{x}{e^{x} - e^{-x}} = f\left(x\right)\left(\dfrac{4}{e^{x} + e^{-x}} - 1\right) = f\left(x\right)\left(\dfrac{4 - e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}}\right) = f\left(x\right)\left(\dfrac{4e^{x} - e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}\right)$

Résultat

Donc $\forall x \in [0;+\infty[\,,\ F'\left(x\right) = -\dfrac{f\left(x\right)}{e^{2x}+1}\left(e^{2x} - 4e^{x} + 1\right)$

2.c)

On sait que $\forall x \in [0;+\infty[\,,\ -\dfrac{f\left(x\right)}{e^{2x}+1} < 0$

Donc F' est du signe de $e^{2x} - 4e^{x} + 1$

On va procéder comme pour la question 6.a, on pose $X = e^{x} > 0$

Notre expression à étudier devient $X^2 - 4X + 1$ dont les 2 solutions sont positives $X_1 = 2 - \sqrt{3}$ et $X_1 = 2 + \sqrt{3}$ (là encore, je te laisse vérifier les calculs).

Notre trinôme est donc positif entre 0 et X_1, puis négatif entre X_1 et X_2 et finalement positif jusqu'en $+\infty$.

En revenant à $x = \ln\left(x\right)$, il ne reste qu'une solution à notre équation car $x_1 = \ln\left(2-\sqrt{3}\right) < 0$ et donc $x_2 = \ln\left(2+\sqrt{3}\right)$

Finalement, F est croissante puis décroissant en changeant de sens de variation en $\ln\left(2+\sqrt{3}\right)$.

D'où le tableau de variations :

x	0		$\ln(2+\sqrt{3})$		$+\infty$
$F'(x)$		$+$	0	$-$	
$F(x)$	0	$\nearrow$	$F\left(\left(\ln\left(2+\sqrt{3}\right)\right)\right)$	$\searrow$	0

Résultat

Donc $F\left(\ln\left(2+\sqrt{3}\right)\right)$ est le maximum de F sur $[0;+\infty[$

Exercice 2

PARTIE I

1)

Comme $m \neq 0$, les racines de (E_m) sont les mêmes que celle de (E'_m) : $z^2 - \dfrac{2}{m}z + \dfrac{m}{m} = 0$

Or, $\dfrac{2}{m} = \dfrac{2}{\sqrt{2}\mathrm{e}^{-i\theta}} = \sqrt{2}\mathrm{e}^{i\theta} = m$

Et $\dfrac{2}{m} = \dfrac{2}{\sqrt{2}\mathrm{e}^{-i\theta}}\ \dfrac{m}{m} = \dfrac{\sqrt{2}\mathrm{e}^{i\theta}}{\sqrt{2}\mathrm{e}^{-i\theta}} = \mathrm{e}^{i2\theta}$

On peut donc réécrire (E'_m) : $z^2 - mz + \mathrm{e}^{i2\theta} = 0$

Dans ce cas, on sait que la somme des racines vaut m.

Comme $z_1 = \dfrac{m(1-i)}{2}$, on a $z_1 + z_2 = \dfrac{m(1-i)}{2} + z_2 = m$

Donc $z_2 = m - \dfrac{m(1-i)}{2} = \dfrac{m(1+i)}{2}$

Résultat

Donc la 2ème solution de (E_m) est $z_2 = \dfrac{m(1+i)}{2}$

2)

En notant que $1 - i = \sqrt{2}\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{4}}$, on trouve :

$z_1 = \dfrac{m(1-i)}{2} = \dfrac{\sqrt{2}\mathrm{e}^{i\theta}\sqrt{2}\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{4}}}{2} = \dfrac{2\mathrm{e}^{i\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)}}{2} = \mathrm{e}^{i\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)}$

Résultat

Donc sous forme exponentielle $z_1 = \mathrm{e}^{i\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)}$

PARTIE II

1)

On trouve de la même façon que $z_2 = \mathrm{e}^{i\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)}$

Ce qui donne : $z_2 = z_1\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}}$ et qui correspond bien à l'écriture algébrique d'une rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$

Résultat

Donc on a bien $M_2 = R(M_1)$

2.a)

Pour cette question, nous allons étudier l'angle former par les vecteurs $\overrightarrow{OM_1}$ et $\overrightarrow{MM_1}$ (puis avec M_2.

Les affixes de $\overrightarrow{MM_1}$ et $\overrightarrow{OM_1}$ sont respectivement $z_1 - m$ et z_1

On sait de plus que l'angle $\left(\overrightarrow{MM_1};\overrightarrow{OM_1}\right) = \arg\left(\frac{z_1 - m}{z_1}\right)$

Or $\frac{z_1 - m}{z_1} = \frac{\mathrm{e}^{i\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)} - \sqrt{2}\mathrm{e}^{i\theta}}{\mathrm{e}^{i\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)}} = 1 - \sqrt{2}\mathrm{e}^{i\theta - \theta + \frac{\pi}{4}} = 1 - \sqrt{2}\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}} = i$

Donc $\arg\left(\frac{z_1 - m}{z_1}\right) = \arg(1 + i) = \frac{\pi}{2}[\pi]$

Et donc $\overrightarrow{OM_1}$ et $\overrightarrow{MM_1}$ sont orthogonaux.

De la même façon, $\frac{z_2 - m}{z_2} = \frac{\mathrm{e}^{i\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)} - \sqrt{2}\mathrm{e}^{i\theta}}{\mathrm{e}^{i\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)}} = 1 - \sqrt{2}\mathrm{e}^{i\theta - \theta - \frac{\pi}{4}} = 1 - \sqrt{2}\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{4}} = -i$

Et $\overrightarrow{OM_2}$ et $\overrightarrow{MM_2}$ sont orthogonaux.

Résultat

Donc $(MM_1) \perp (OM_1)$ et $(MM_2) \perp (OM_2)$

2.b) Question un peu surprenante !

Le résultat est immédiat : $OM_1 = \|z_1\| = \left\|\mathrm{e}^{i\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)}\right\| = 1$

Et $OM_2 = \|z_2\| = \left\|\mathrm{e}^{i\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)}\right\| = 1$

Résultat

Donc $OM_1 = OM_2 = 1$

2.c)

Le quadrilatère OM_1MM_2 possède 3 angles droits (d'après les questions précédentes) et donc 4.

De plus, 2 côtés consécutifs sont de même longueur, ce qui impose que les 4 côtés aient la même longueur.

Résultat

Donc OM_1MM_2 est un carré.

3.a)

Etudions $m - h$:

$m - h = \sqrt{2}\mathrm{e}^{i\theta} - \frac{-i}{\sqrt{2}\sin(\theta)}\mathrm{e}^{i2\theta} = \mathrm{e}^{i\theta}\left(\sqrt{2} + \frac{i(\cos(\theta) + i\sin(\theta))}{\sqrt{2}\sin(\theta)}\right)$

$= \mathrm{e}^{i\theta}\left(\frac{2\sin(\theta) + i\cos(\theta) - \sin(\theta)}{\sqrt{2}\sin(\theta)}\right) = (\cos(\theta) + i\sin(\theta))\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{\cos(\theta)}{\sqrt{2}\sin(\theta)}\right)$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}\cos(\theta) - \frac{1}{\sqrt{2}}\cos(\theta) + i\frac{1}{\sqrt{2}}(\sin(\theta) - \cos(\theta))$

Finalement $m-h=i\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sin\left(\theta\right)-\cos\left(\theta\right)\right)$

D'autre part :

$1-h\overline{m}=1-\frac{-i}{\sqrt{2}\sin\left(\theta\right)}\mathrm{e}^{i2\theta}\times\sqrt{2}\mathrm{e}^{-i\theta}=1+\frac{i\mathrm{e}^{i\theta}}{\sin\left(\theta\right)}=1+\frac{-\sin\left(\theta\right)+i\cos\left(\theta\right)}{\sin\left(\theta\right)}=i\frac{\cos\left(\theta\right)}{\sin\left(\theta\right)}$

Résultat

Donc $\mathrm{Re}\left(m-h\right)=\mathrm{Re}\left(1-h\overline{m}\right)=0$.

3.b) On repart sur un sympathique calcul !

$\frac{a-h}{m+1}=\frac{1+\frac{i}{\sqrt{2}\sin\left(\theta\right)}\mathrm{e}^{i2\theta}}{\sqrt{2}\mathrm{e}^{i\theta}+1}=\frac{\sqrt{2}\sin\left(\theta\right)+i\left(\cos\left(2\theta\right)+i\sin\left(2\theta\right)\right)}{\sqrt{2}\sin\left(\theta\right)\left(\sqrt{2}\left(\cos\left(\theta\right)+i\sin\left(\theta\right)\right)+1\right)}$

On va décomposer le calcul qui est très lourd ! Accroche-toi !

On "isole" le facteur $\frac{1}{\sqrt{2}\sin\left(\theta\right)}$ qu'on peut se permettre de ne pas prendre en compte puisqu'on veut arriver à 0 !

On va étudier la quantité :

$\mathrm{Re}\left(\frac{\sqrt{2}\sin\left(\theta\right)+i\left(\cos\left(2\theta\right)+i\sin\left(2\theta\right)\right)}{\sqrt{2}\left(\cos\left(\theta\right)+i\sin\left(\theta\right)\right)+1}\right)$

On multiplie le numérateur et le dénominateur par le conjugué du dénominateur. On obtient donc un réel au dénominateur (c'est le but !) et on va une nouvelle fois "isoler" ce dénominateur et étudier uniquement la partie réelle du numérateur.

J'insiste, tout cela n'a de sens que parce qu'on cherche à trouver 0.

Notons déjà que

$\sqrt{2}\sin\left(\theta\right)+i\left(\cos\left(2\theta\right)+i\sin\left(2\theta\right)\right)=\sqrt{2}\sin\left(\theta\right)+i\cos^2\left(\theta\right)-i\sin^2\left(\theta\right)-2\sin\left(\theta\right)\cos\left(\theta\right)$

On veut donc étudier :

$\mathrm{Re}\left[\left(\sqrt{2}\cos\left(\theta\right)+1-i\sqrt{2}\sin\left(\theta\right)\right)\left(\sqrt{2}\sin\left(\theta\right)+i\cos^2\left(\theta\right)-i\sin^2\left(\theta\right)-2\sin\left(\theta\right)\cos\left(\theta\right)\right)\right]$

$=\sqrt{2}\sin\left(\theta\right)\left(\sqrt{2}\cos\left(\theta\right)+1-\sqrt{2}\cos\left(\theta\right)-2\cos^2\left(\theta\right)+\cos^2\left(\theta\right)-\sin^2\left(\theta\right)\right)$

$=\sqrt{2}\sin\left(\theta\right)\left(1-\cos^2\left(\theta\right)-\sin^2\left(\theta\right)\right)=0$

Ouf ! Désolé d'avoir "écourter" les calculs, mais c'est difficile à présenter, j'espère que les explications sont assez claires !

Résultat

Donc $\mathrm{Re}\left(\frac{a-h}{m+1}\right)=0$.

3.b)

Le résultat précédent nous donne donc que $\arg\left(\frac{a-h}{m+1}\right)=\frac{\pi}{2}$

Ce qui permet de déduire que $\overrightarrow{AH}\perp\overrightarrow{BM}$

Et donc $(AH)\perp(BM)$

Par ailleurs, (AB) est en fait confondu avec l'axe des abscisses (les 2 affixes étant des réels).

Et donc $\operatorname{Re}(m-h) = 0$ nous indique que (MH) est en fait parallèle à l'axe des ordonnées (l'affixe de son vecteur directeur est imaginaire pur).
Ce qui confirme également que $(AB) \perp (MH)$

Résultat

Donc $(AB) \perp (MH)$ et $(AH) \perp (BM)$

4.a)

On a déjà : $z_2 - z_1 = \dfrac{m(1+i)}{2} - \dfrac{m(1-i)}{2} = mi = \sqrt{2}i\mathrm{e}^{i\theta}$

D'où $\dfrac{h-z_1}{z_2-z_1} = \dfrac{\dfrac{-i}{\sqrt{2}\sin(\theta)}\mathrm{e}^{i2\theta} - \dfrac{m(1-i)}{2}}{\sqrt{2}i\mathrm{e}^{i\theta}} = \dfrac{-i\sqrt{2}\mathrm{e}^{i2\theta} - \sqrt{2}\mathrm{e}^{i\theta}\sin(\theta)(1-i)}{2\sqrt{2}i\sin(\theta)\mathrm{e}^{i\theta}}$
$= \dfrac{-i\mathrm{e}^{i\theta} - \sin(\theta)(1-i)}{2i\sin(\theta)} = -\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\cos(\theta)+\sin(\theta)}{i\sin(\theta)} + \dfrac{1-i}{i}\right) == -\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} + i - i - 1\right)$

Résultat

Donc $\dfrac{h-z_1}{z_2-z_1} = \dfrac{1}{2}(1-\cot(\theta))$

4.b)

Cela indique que $\operatorname{Im}\left(\dfrac{h-z_1}{z_2-z_1}\right) = 0$

Et donc $\arg\left(\dfrac{h-z_1}{z_2-z_1}\right) = 0\,[\pi]$

Résultat

Et donc H, M_1 et M_2

Exercice 3

PARTIE I

A.1)

Résultat

On vérifie rapidement que $(2,1)$ est solution de (F)

A.2)

A partir des solutions "évidentes" trouvées à la question précédente, on peut écrire :
$(u-2)-9\,(v-1)=0$
Ou encore $5\,(u-2)=9\,(v-1)$

Comme 5 et 9 sont premiers entre eux, d'après le théorème de Gauss,
Il existe un entier k tel que $u-2=9k$ ou $u=9k+2$
En reportant cela, on trouve $45k=9\,(v-1)$, d'où $5k=v-1$

Résultat

Les solutions de (F) sont $(9k.+2, 5k+1)\,,\ k\in\mathbb{Z}$

A.3)

Une façon bien compliquée d'écrire $5^2=25=19+6$

Résultat

On vérifie bien que $5^{u_0}\equiv 6\,[19]$

B.1.a)

Comme 19 est un nombre premier, si x n'est pas premier avec 19, alors $x=1$ ou x est un multiple de 19.
Dans ces 2 cas, il ne peut vérifier l'équation (E).
Donc x et 19 sont premiers entre eux.

En utilisant le petit théorème de Fermat,

Résultat

On conclut que x et 19 sont premiers entre eux et que $x^{18}\equiv 1\,[19]$

B.1.b)

On utilise l'égalité $2026=18\times 112+10$ qui nous indique que
$\left(x^{18}\right)^{112}\times x^{10}\equiv 5\,[19]$

Résultat

En utilisant le résultat de la question précédente, on conclut que $x^{10}\equiv 5\,[19]$

B.1.c)

Supposons $x^2 \equiv 6\,[19]$.

Comme $6^5 = 7776 = 409 \times 19 + 5$, on trouve bien que $x^{10} \equiv 5\,[19]$

Résultat

Donc $x^2 \equiv 6\,[19]$

B.1.d)

Le nombre de cas restant limité, on peut vérifier la congruence des entiers modulo 19

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$n^2 \pmod{19}$	1	4	9	16	6	17	11	7	5

n	10	11	12	13	14	15	16	17	18
$n^2 \pmod{19}$	5	7	11	17	6	16	9	4	1

Table 1 – Carrés des entiers de 1 à 18 modulo 19

On trouve donc comme solution 5 et $14 = -5\,[19]$

Résultat

Donc $x \equiv 5\,[19]$ ou $x \equiv -5\,[19]$

B.2)

On "remonte" les étapes pour vérifier que $x \equiv 5\,[19]$ et $x \equiv -5\,[19]$ sont solutions de (E).

Résultat

Donc $x \equiv 5\,[19]$ et $x \equiv -5\,[19]$ sont solutions de (E).

PARTIE II

1)

On peut identifier les solutions de (E) comprises entre 1 et 100 :

Il s'agit de $5; 14; 24; 33; 43; 52; 62; 71; 81; 90$ et 100. Il y a donc 11 boules correspondantes.

Résultat

Donc la probabilité de V est $p = 0,11$

2) Pour calculer cette probabilité, nous allons passer par l'événement inverse qui est donc "on ne réalise jamais V".

La probabilité de ne pas réaliser V est de $1 - 0,11 = 0,89$

Et on doit donc résoudre l'équation $(0,89)^n \leqslant 0,05$
On passe au logarithme $n\ln(0,89) \leqslant \ln(0,05)$

Attention

Toujours faire attention au signe du logarithme qui va changer le sens des inégalités ! Dans les exercices sur les probabilités, les quantités manipulées sont plus petites que 1 et le logarithme est négatif.

Et donc, $n \geqslant \dfrac{\ln(0,05)}{\ln(0,89)} \approx 25,7$

Résultat

Donc pour $n \geqslant 26$, on a plus de 95% de chances de réalise au moins une fois V

Exercice 3

1)

Etudions le produit $M(x) \times M(y)$

$$M(x) \times M(y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x^2 & 1-x & x \\ x^2+2x & -x & x+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ y^2 & 1-y & y \\ y^2+2y & -y & y+1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x^2+y^2-y^2x+y^2x+2xy & 1-x-y+xy-xy & y-xy+xy+x \\ x^2+2x-xy^2+xy^2+2xy+y^2+2y & -x+xy-xy-y & -xy+xy+x+y+1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x^2+y^2+2xy & 1-x-y & x+y \\ x^2+y^2+2xy+2x+2y & -x-y & x+y+1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ (x+y)^2 & 1-(x+y) & x+y \\ (x+y)^2+2(x+y) & -(x+y) & x+y+1 \end{pmatrix} = M(x+y)$$

Résultat

Donc $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ M(x) \times M(y) = M(x+y)$

2.a)

D'après la question précédente, on a :
$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \varphi(x+y) = M(x+y) = M(x) \times M(y)$
Par définition de E, on trouve $\varphi(\mathbb{R}) = E$

Résultat

φ est un homomorphisme de $(\mathbb{R},+)$ vers $(M_3(\mathbb{R}), \times)$ et $\varphi(\mathbb{R}) = E$

2.b)

D'après les propriétés de l'addition dans $\mathbb{R}$, $M(x+y) = M(y+x)$

Et donc $M(x) \times M(y) = M(y) \times M(x)$

Reste à préciser que $I = M(0)$ qui est donc bien l'élément neutre de $(E, \times)$ et que $M(-x)$ est l'opposé de $M(x)$

Résultat

Donc $(E, \times)$ est un groupe commutatif.

3.a)

Sans entrer dans les détails, (E, T) est bien stable par T (par la définition même) et commutatif par les propriétés de la multiplication dans $\mathbb{R}$.

L'élément neutre est $M\left(\dfrac{1}{2}\right)$ et l'inverse de $M(x)$ est $M\left(\dfrac{1}{4x}\right)$, si $x \neq 0$ (et donc si $M(x) \neq I$

Résultat

Avec toutes ces propriétés, $(E - \{I\}, T)$ est un groupe commutatif.

3.b)

Les 2 questions précédentes ont décrit les 2 structures de groupes nécessaires pour obtenir un corps.

Résultat

Avec toutes ces propriétés, $(E, \times, T)$ est un corps commutatif.

4.a) Procédons par récurrence, c'est assez immédiat avec la question 1.

Initialisation : $M(x) \times M(x) = M(x+x)$

Et donc $(M(x))^2 = M(2x)$

Hérédité : supposons la proposition vraie au rang n et étudions le rang $n+1$

$(M(x))^{n+1} = M(x) \times (M(x))^n = M(x) \times M(nx) = M((n+1)x)$

Ce qui confirme l'hérédité de la proposition.

Résultat

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ (M(x))^n = M(nx)$.

4.b) Nous allons évidemment utiliser la question précédente.

On peut donc dire que $X^3 - X^2 = M(3x) - M(2x)$

A partir du coefficient 23 (ou 32), on déduit $3x - 2x = x = -1$

On vérifie rapidement que cela fonctionne bien pour les autres coefficient de la matrice.

Résultat

On conclut donc que la solution de l'équation est $M(-1)$.