Exercice 1 :

Oral Mines-Ponts 2023 (MP)

1. Soit un entier $n \geqslant 2$
Montrer que l'équation $x^n - nx + 1 = 0$ admet une unique solution dans $[0;1]$

On la note x_n

2. Etudier la monotonie et la convergence de (x_n)
<u>Indice :</u> on pourra s'intéresser aux images de x_n et x_{n+1} par une des 2 fonctions f_n ou f_{n+1}.

3. Déterminer un équivalent de x_n en $+\infty$

4. [Bonus] Donner un développement asymptotique à 2 termes

Corrigé :

1. On introduit une fonction intermédiaire f_n que l'on va définir par :
$\forall x \in [0;1],\ f_n(x) = x^n - nx + 1$

<u>Remarque :</u> on pourrait évidemment définir f_n sur $\mathbb{R}$, mais l'exercice se concentre uniquement sur $[0;1]$ donc ça n'apporterait rien de particulier, à part compliquer l'étude de la fonction !

<u>Attention :</u> dans cette question, on considère un $n \geqslant 2$ quelconque, mais fixé ! n varie uniquement à partir de la question suivante. Pour te représenter les choses, n'hésite pas à utiliser la calculatrice ou Géogebra pour tracer les courbes de $f_4(x) = x^4 - 4x + 1$ et $f_5(x) = x^5 - 5x + 1$ par exemple (idéalement, prends une fois n pair et une fois n impair).

f_n est une fonction polynomiale donc continue et dérivable sur $[0;1]$ et on a :
$\forall x \in [0;1],\ f_n'(x) = nx^{n-1} - n = n\left(x^{n-1} - 1\right)$

Donc $\forall x \in [0;1],\ f_n'(x) \leqslant 0$
Et même plus, $\forall x \in [0;1[,\ f_n'(x) < 0$
Ainsi f_n est strictement décroissante sur $[0;1]$

De plus, $f_n(0) = 1$ et $f_n(1) = 2 - n \leqslant 0$

Ainsi, f_n réalise une bijection de $[0;1]$ sur $[2-n;1]$

Ce qui confirme bien que l'équation $x^n - nx + 1 = 0$ admet une unique solution x_n dans $[0;1]$

2. Commençons par étudier la monotonie de la suite.
Compte-tenu de la définition de la suite on comprend qu'on ne va pas pouvoir utiliser le traditionnel $x_{n+1} - x_n$. Tu as probablement essayer, n'hésite pas à me dire si tu as pu avancer sur cette voie !

<u>Idée :</u> x_n est définie uniquement par rapport à f_n et nous allons donc devoir utiliser cela. On va s'intéresser aux images de x_n et x_{n+1} par une des 2 fonctions f_n ou f_{n+1} et utiliser la monotonie de la fonction. C'est pour cela que j'ai rajouté l'indice dans l'énoncé qui ne figure évidemment pas dans l'oral de concours !

Soit $n \geqslant 2$, on a $f_{n+1}\left(x_n\right) = x_n^{n+1} - (n+1)\,x_n + 1 = x_n^{n+1} - n\,x_n - x_n + 1$ (attention, j'utilise bien f_{n+1} !)

Or, par définition de x_n, $-n\,x_n + 1 = -\,x_n^n$

Ainsi, $f_{n+1}\left(x_n\right) = x_n^{n+1} - x_n^n - x_n = x_n^n\left(x_n - 1\right) - x_n \leqslant 0$

Comme par définition $f_{n+1}\left(x_{n+1}\right) = 0$ et d'après la question précédente f_{n+1} est décroissante, on peut conclure que $x_n \geqslant x_{n+1}$

Et donc $\left(x_n\right)$ est décroissante.

$\left(x_n\right)$ est décroissante et minorée par 0 donc convergente vers une limite $l \in \left[0;1\right[$, d'après le théorème de la limite monotone.
On s'assure de l'intervalle ouvert simplement avec $f_3(1) = -\,1$ et donc $x_3 < 1$.

Reprenons une nouvelle fois la définition de x_n, qu'on peut réécrire $n\,x_n = 1 + x_n^n$

Quand $n \to +\,\infty$, d'après la remarque précédente, on a $x_n^n \to 0$
On en déduit que $n\,x_n \to 1$

Or, si $l > 0$, on a $n\,x_n \geqslant n\,l$ et $n\,l \to +\,\infty$

Ce qui impose que $\left(x_n\right)$ converge vers 0.

3. La question précédente nous donne immédiatement l'équivalence !

En repartant de $n\,x_n \to 1$ quand $n \to +\,\infty$:

On déduit que $x_n \sim \dfrac{1}{n}$.

4. On change de registre pour cette dernière question !

<u>Rappel :</u> *trouver un développement asymptotique signifie trouver un équivalent à* $x_n - \dfrac{1}{n}$.

Pour simplifier la rédaction, on pose $\forall n \geqslant 2,\ u_n = x_n - \dfrac{1}{n}$

On utilise à nouveau la définition de x_n pour écrire :

$$f_n\left(x_n\right) = \left(u_n + \frac{1}{n}\right)^n - n\left(u_n + \frac{1}{n}\right) + 1 = 0$$

Or $\left(u_n + \dfrac{1}{n}\right)^n - n\left(u_n + \dfrac{1}{n}\right) + 1 = \left(\dfrac{nu_n + 1}{n}\right)^n - n\,u_n$

On a donc $n\,u_n = \left(\dfrac{nu_n + 1}{n}\right)^n$

On sait par définition de u_n (et définition de l'équivalence) que $n\,u_n \to 0$.

Pour trouver un équivalent de u_n, on doit trouver la limite de $\left(1+nu_n\right)^n$
On sait que $\left(1+nu_n\right)^n = \exp\left[n\ln\left(1+nu_n\right)\right] \sim \exp\left(n^2u_n\right)$

<u>Rappel :</u> (enfin pas vraiment rappel en fait) on a déjà dépassé la frontière de la Terminale, donc on continue avec une équivalence classique (ou développement limité si tu n'as pas peur des gros mots !)
$\ln(1+x) \sim x$ *en* 0.

Comme on a vu que $nu_n \to 0$, on peut facilement majorer cette quantité par 1 par exemple.

Ainsi, $nu_n = \left(\dfrac{nu_n+1}{n}\right)^n \leqslant \left(\dfrac{1+1}{n}\right)^n = \left(\dfrac{2}{n}\right)^n$

Donc $n^2u_n \leqslant \dfrac{2^n}{n^{n-1}} = 2\left(\dfrac{2}{n}\right)^{n-1}$

<u>Attention :</u> j'allais conclure un peu vite, je me rends compte que je n'ai pas vérifié le signe de u_n donc je ne peux pas appliquer le théorème des gendarmes ! On pourrait encadrer en minorant par la même méthode que la majoration, mais regardons une autre propriété de u_n.

Calculons $f_n\left(\dfrac{1}{n}\right) = \left(\dfrac{1}{n}\right)^n - n\left(\dfrac{1}{n}\right) + 1 = \dfrac{1}{n^n} > 0$
Ainsi $x_n > \dfrac{1}{n}$ et donc $u_n > 0$ (ouf !)

Finalement, $0 \leqslant n^2u_n \leqslant 2\left(\dfrac{2}{n}\right)^{n-1}$ et donc $n^2u_n \to 0$ et $\exp\left(n^2u_n\right) \to 1$, ce qui nous permet de conclure que $\left(1+nu_n\right)^n \to 1$!

<u>Remarque :</u> c'est l'intuition qu'on pouvait avoir avec le nu_n dans les 2 membres de l'égalité, mais la preuve n'est pas triviale !

En reprenant l'égalité $nu_n = \left(\dfrac{nu_n+1}{n}\right)^n$, on trouve $nu_n \sim \dfrac{1}{n^n}$ ou encore $u_n \sim \dfrac{1}{n^{n+1}}$

On trouve donc le développement asymptotique $x_n = \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^{n+1}} + o\left(\dfrac{1}{n^{n+1}}\right)$

<u>Remarque :</u> le 2ème terme du développement est extrêmement petit avec ce terme $\dfrac{1}{n^{n+1}}$ qui tend très rapidement vers 0. x_n se « rapproche » donc très vite de $\dfrac{1}{n}$. Tu peux le vérifier en utilisant Géogebra par exemple pour déterminer les 1ers termes de la suite.

Exercice 2 :
Oral Mines-Ponts 2023 (MP)

1. Soit un entier $n \geqslant 2$.

Montrer que l'équation $\sin(x) = \dfrac{x}{n}$ admet une unique solution sur $\left]0;\pi\right[$

On la note x_n.

Indice : On pourra étudier la fonction f définie par $\forall x \in \left]0;\pi\right[,\ f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$ en reformulant l'équation que l'on doit résoudre.

2. Montrer que (x_n) converge et déterminer sa limite.

3. [Bonus] Donner un développement asymptotique de (x_n) avec une précision de $o\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$

Corrigé :

1. Faisons déjà le lien entre la question et la fonction proposée :

$\forall x \in \left]0;\pi\right[,\ \sin(x) = \dfrac{x}{n} \Leftrightarrow \dfrac{\sin(x)}{x} = \dfrac{1}{n}$ (x est bien non nul sur l'intervalle)

Et comme proposé par l'énoncé, on va étudier la fonction f pour prouver l'existence d'un unique antécédent à $\dfrac{1}{n}$.

Remarque 1 : l'indice n'est pas donné dans l'exercice d'oral. On va rapidement voir que c'est plus simple de passer par cette fonction que d'utiliser la même méthode que dans l'exercice précédent, même si cela aurait marché également.

Remarque 2 : en plus ça tombe bien, c'est une fonction classique à connaitre !

f n'est évidemment pas définie en 0, nous allons commencer par étudier sa limite :

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x) - \sin(0)}{x - 0}$

Rappel : c'est une limite classique elle aussi pour laquelle il faut connaitre la méthode en reconnaissant la limite d'un taux d'accroissement et donc une dérivée !

Ainsi $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x) - \sin(0)}{x - 0} = \cos(0) = 1$

Et finalement $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$

f est bien continue et dérivable sur l'intervalle considéré $\left]0;\pi\right[$, comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas.

$\forall x \in \left]0;\pi\right[,\ f'(x) = \dfrac{x\cos(x) - \sin(x)}{x^2}$

Malheureusement, cela ne permet pas de conclure tout de suite sur le sens de variation de f.

Introduisons une fonction intermédiaire g qui sera du même signe que f' définie par :

$\forall x \in \left]0;\pi\right[,\ g(x) = x\cos(x) - \sin(x)$

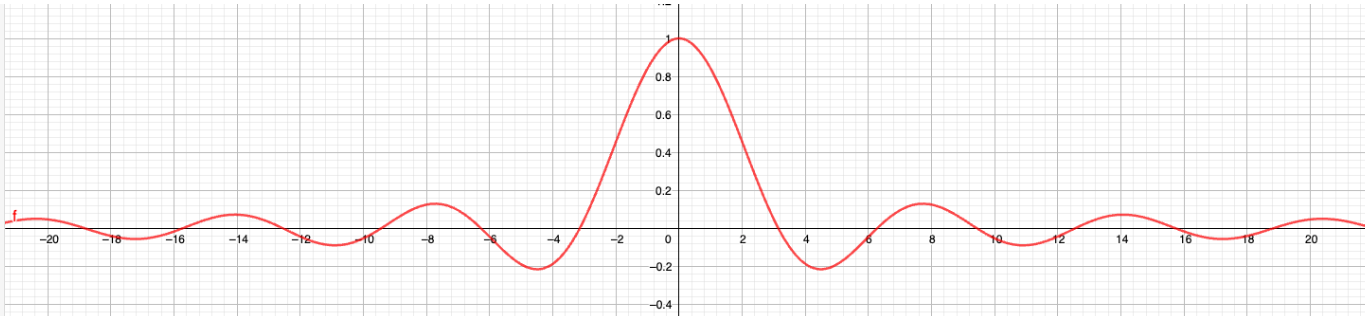
g est bien dérivable sur $\left]0;\pi\right[$ et

$\forall x \in \left]0;\pi\right[,\ g'(x) = \cos(x) - x\sin(x) - \cos(x) = -x\sin(x) \leqslant 0$ (car sur $\left]0;\pi\right[$ $\sin(x) \geqslant 0$)

Donc g est décroissante sur $\left]0;\pi\right[$ et $g(0) = 0$.

Ainsi, on peut affirmer que $\forall x \in \left]0;\pi\right[,\ f'(x) = \dfrac{x\cos(x) - \sin(x)}{x^2} < 0$

Et f est strictement décroissante sur $\left]0;\pi\right[$ entre 1 et $f(\pi) = 0$, comme on peut le voir sur la représentation ci-dessous :



(La représentation est évidemment plus large que l'intervalle $\left]0;\pi\right[$, mais comme je le disais au début, c'est une fonction à connaitre, donc j'en profite pour te mettre sa représentation. Je te laisse identifier la portion qui nous intéresse dans cet exercice, n'hésite pas si tu as des questions !)

Finalement f réalise une bijection de $\left]0;\pi\right[$ sur $\left]0;1\right[$.

De plus, on a bien $\forall n \geqslant 2,\ \dfrac{1}{n} \in \left]0;1\right[$

Cela confirme bien que $\dfrac{1}{n}$ possède un unique antécédent par f sur $\left]0;\pi\right[$.

Et finalement $\sin(x) = \dfrac{x}{n}$ admet une unique solution x_n sur $\left]0;\pi\right[$

2. On vient de voir que f réalise une bijection de $\left]0;\pi\right[$ sur $\left]0;1\right[$.

On peut donc écrire que $x_n = f^{-1}\left(\dfrac{1}{n}\right)$ (même si on ne sait pas l'exprimer)

Or, comme f est décroissante et que la suite des images que l'on cherche l'est également ($\dfrac{1}{n}$ est bien de plus en plus petit quand n grandit), on peut affirmer que (x_n) est croissante.

<u>Remarque :</u> dit autrement, (x_n) est la suite des antécédents d'éléments de plus en plus petit, on voit sur le graphique que ces antécédents sont de plus en plus grands.

(x_n) est croissante et majorée par π donc convergente.

On a $\dfrac{1}{n}$ qui tend vers 0 et par continuité de f, x_n va tendre vers son antécédent, qui est π.

$\boxed{(x_n) \text{ converge donc vers } \pi}$

Remarque : on voit que la méthode utilisée a rendu ces 2 premières questions plus simple car on s'appuie sur l'utilisation d'une seule fonction et des propriétés de la continuité. On a détaillé l'étude de fonction ici, ce qui n'aurait pas été nécessaire pour un élève de prépa.

3. J'espère que tu auras le courage d'aller jusqu'au bout, même si on est un peu loin du programme, on retrouve à la fin une astuce à avoir dans la boîte à outils ! C'est parti !

De la même façon que pour l'exercice précédent, on va introduire une suite intermédiaire (u_n) définit par $\forall n \geqslant 2,\ u_n = x_n - \pi$.

On sait que $\forall n \geqslant 2,\ x_n \leqslant \pi$ et donc $u_n \leqslant 0$

Repartons de la définition de x_n : $\sin(x_n) = \dfrac{x_n}{n}$ ou $\sin(u_n + \pi) = \dfrac{u_n + \pi}{n}$

Or $\sin(u_n + \pi) = -\sin(u_n)$

Et donc $-\sin(u_n) = \dfrac{u_n + \pi}{n}$

On utilise le développement limité classique en 0 au 1er degré : $\sin(u_n) = u_n + o(u_n^2)$

En replaçant ceci dans l'égalité :

$-u_n + o(u_n^2) = \dfrac{u_n + \pi}{n}$

Ou encore $u_n + \dfrac{u_n}{n} + o(u_n^2) = -\dfrac{\pi}{n}$

Ainsi, au premier degré, $u_n \sim -\dfrac{\pi}{n}$

En utilisant cette fois un DL au degré 3 de sinus : $\sin(u_n) = u_n - \dfrac{u_n^3}{6n} + o(u_n^3)$

Ce qui donne $u_n + \dfrac{u_n}{n} - \dfrac{u_n^3}{6n} + o(u_n^3) = -\dfrac{\pi}{n}$

$u_n\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) = -\dfrac{\pi}{n} + \dfrac{u_n^3}{6} + o(u_n^3)$ ou encore $u_n = -\dfrac{\pi}{n} \times \dfrac{1}{1 + \frac{1}{n}} + \dfrac{n}{n+1} \times \dfrac{u_n^3}{6} + o(u_n^3)$

L'écriture un peu compliquée est volontaire, car on va reconnaître la somme d'une suite géométrique :

$\dfrac{1}{1 + \frac{1}{n}} = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \left(-\dfrac{1}{n}\right)^k$

Remarque : c'est une astuce hyper classique là encore ! Quand la raison est plus petite que 1, le numérateur de la somme vue en classe tend vers 0 et il ne reste que le 1.

Dans notre cas, nous allons nous contenter des 1ers termes : $\dfrac{1}{1 + \frac{1}{n}} = 1 - \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$

Remarque : on s'arrête au terme en $\dfrac{1}{n^2}$ car on multiplie ce développement par $\dfrac{1}{n}$, donc on arrive sur un terme en $\dfrac{1}{n^3}$ qui est ce que l'on cherche.

On a donc maintenant :
$$-\frac{\pi}{n}\times\frac{1}{1+\frac{1}{n}}=-\frac{\pi}{n}\left(1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)=-\frac{\pi}{n}+\frac{\pi}{n^2}-\frac{\pi}{n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

Et d'autre part :
$$\frac{n}{n+1}\times\frac{u_n^3}{6}=\frac{\pi^3}{6n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

Pour le dernier terme, avec l'équivalence au 1 degré, on a $o\left(u_n^3\right)=o\left(\frac{1}{n^3}\right)$

Finalement, en reprenant les différentes parties :
$$u_n=-\frac{\pi}{n}+\frac{\pi}{n^2}-\frac{\pi}{n^3}-\frac{\pi^3}{6n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

Et on conclut : $x_n=\pi-\frac{\pi}{n}+\frac{\pi}{n^2}-\frac{1}{n^3}\left(\pi+\frac{\pi^3}{6}\right)+o\left(\frac{1}{n^3}\right)$