Exercices prépa accessibles

Exercice 1 (Centrale PSI 2005) :

On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \left(5\sin\frac{1}{n^2} + \frac{1}{5}\cos n\right)^n$

Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

Corrigé :

<u>Remarque préliminaire :</u> comme on va le voir cet exercice est assez accessible, même en Terminale. En oral de concours (surtout niveau Centrale), ça n'est pas un exercice qui va vous permettre d'intégrer mais un exercice qui sera éliminatoire si vous n'arriver pas à la résoudre assez rapidement. Entrons dans le vif du sujet !

Comme $u_n = \left(5\sin\frac{1}{n^2} + \frac{1}{5}\cos n\right)^n$, pour montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, on va chercher à montrer qu'il existe un N tel que :

$\forall N \geqslant n,\ \left|5\sin\frac{1}{n^2} + \frac{1}{5}\cos n\right| < 1$

Notons déjà que par inégalité triangulaire, $\left|5\sin\frac{1}{n^2} + \frac{1}{5}\cos n\right| \leqslant \left|5\sin\frac{1}{n^2}\right| + \left|\frac{1}{5}\cos n\right|$

On a déjà que $\forall x \in \mathbb{R},\ \left|\cos x\right| < 1$ et donc $\left|\frac{1}{5}\cos x\right| < \frac{1}{5}$

Malheureusement, on ne peut pas utiliser le même astuce pour l'autre membre de l'addition !
Cependant, quand $x \to 0,\ \sin x \to 0$
Donc, quand $n \to +\infty,\ \frac{1}{n^2} \to 0$ et par continuité de la fonction sinus, $\sin\frac{1}{n^2} \to 0$

On sait donc qu'on peut trouver un N tel que $\forall N \geqslant n,\ \left|\sin\frac{1}{n^2}\right| < \frac{1}{25}$ ou encore $\left|5\sin\frac{1}{n^2}\right| < \frac{1}{5}$

<u>Remarque 1 :</u> on ne cherchera pas à expliciter le N en question, son existence suffit à étudier le comportement en $+\infty$

<u>Remarque 2 :</u> On peut imaginer une majoration plus proche de 1, mais là encore, ça ne présente pas de valeur ajoutée particulière pour l'exercice.

Finalement, on est bien assuré de l'existence d'un N tel que $\forall N \geqslant n,\ \left|5\sin\frac{1}{n^2} + \frac{1}{5}\cos n\right| < 1$

$\boxed{\text{On conclut donc comme demandé } \lim\limits_{n\to+\infty}\left(5\sin\frac{1}{n^2} + \frac{1}{5}\cos n\right)^n = 0}$

Exercice 2 (CCP MP 2005) :

Cet exercice me semble trop compliqué, avec son énoncé originel, pour des élèves de lycée. Cependant, il m'a plu car les concepts utilisés sont bien enseignés au lycée.
Je donne l'énoncé pour les plus courageux, ou ceux qui serait déjà en post-bac.
J'ai revu l'énoncé pour le rendre plus accessible.

Enoncé :

Pour tout entier $n \geqslant 2$ on définit la suite (u_n) par $u_n = \sum_{i+j=n} \frac{1}{ij}$ (avec $i \geqslant 1$ et $j \geqslant 1$)

Donner un équivalent simple de u_n quand n tend vers $+\infty$

Enoncé Terminale :

1. En utilisant le lien entre les fonctions $x \mapsto \frac{1}{x}$ et $x \mapsto \ln(x)$, montrer que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \approx \ln(n)$ quand $n \to +\infty$.

2. Le but de l'exercice est d'étudier le comportement asymptotique de la suite (u_n) définie pour $n \geqslant 2$ par $u_n = \sum_{i+j=n} \frac{1}{ij}$ (avec $i \geqslant 1$ et $j \geqslant 1$).

a. Réécrire le terme générique u_n pour pouvoir le décomposer en éléments simples. Exprimer u_n en somme de ces éléments.
b. Montrer que $u_n \approx \frac{2\ln(n)}{n}$ quand $n \to +\infty$

Corrigé :

1. On sait que $x \mapsto \frac{1}{x}$ est la dérivée de $x \mapsto \ln(x)$

De plus, on peut écrire $\int_k^{k+1} \frac{1}{x}\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{k} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x}\mathrm{d}x$ ($x \mapsto \frac{1}{x}$ est décroissante)

En sommant, on trouve $\sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqslant 1 + \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x}\mathrm{d}x$

<u>Attention :</u> on doit isoler le 1er terme de la somme de droite, car celui-ci n'est pas définit !

En utilisant la relation de Chasles, on a donc :

$$\int_1^{n+1} \frac{1}{x}\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqslant 1 + \int_1^{n} \frac{1}{x}\mathrm{d}x$$

Ce qui donne finalement $\ln(n+1) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqslant 1 + \ln(n)$

Et par encadrement on conclut que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \approx \ln(n)$ quand $n \to +\infty$.

2.
a. Formulé comme dans l'énoncé il n'est pas facile de manipuler la somme du terme générique u_n.
Mais si $i + j = n$, on peut écrire $j = n - i$ et $ij = i(n-i)$

Ainsi, on peut écrire $u_n = \sum_{i+j=n} \frac{1}{ij} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i(n-i)}$

Décomposons maintenant le terme à l'intérieur de la somme.
Pour rappel, on cherche a et b dans $\mathbb{Z}$ tels que $\frac{1}{i(n-i)} = \frac{a}{i} + \frac{b}{n-i}$

Or $\frac{a}{i} + \frac{b}{n-i} = \frac{a(n-i)+bi}{i(n-i)} = \frac{a(n-i)+bi}{i(n-i)} = \frac{an+\left(b-a\right)i}{i(n-i)}$

Par identification, on trouve $a = b = \frac{1}{n}$

Ainsi, $u_n = \sum_{i+j=n} \frac{1}{ij} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i(n-i)} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{ni} + \frac{1}{n(n-i)}$

On remarque alors que $\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{ni} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{n(n-i)}$

On conclut donc que $u_n = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i}$

b. En reprenant le résultat de la question 1, on peut écrire $\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i} \approx \ln(n-1)$

Or $\ln(n-1) = \ln\left(n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) = \ln(n) + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$

Et donc, plus simplement, $\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i} \approx \ln(n)$

Finalement, on trouve l'équivalence $u_n \approx \frac{2\ln(n)}{n}$