CAPES 2024 - Epreuve 1

Problème 1

Proportionnalité

1. On peut vérifier rapidement que $m = 5$ permet bien d'obtenir un tableau de proportionnalité. (Je laisse chacun faire le calcul si besoin)

Regardons plus généralement. Pour obtenir un tableau de proportionnalité, il faut que le déterminant soit nul :
$(1-m)(1+m) = -3 \times 8 = -24$
Ou $1 - m^2 = -24$

Et finalement $m^2 = 25$

$\boxed{\text{Donc } m = \pm 5 \text{ et la proposition est FAUSSE}}$

2. Nommons P_0 le prix de départ et P_1 le prix final.

$P_1 = P_0 \times 1{,}55 \times 0{,}72 \approx 1{,}12$

$\boxed{\text{Donc l'augmentation du prix est d'environ } 12\,\% \text{ et la proposition est FAUSSE}}$

<u>Remarque :</u> c'est évidemment un piège classique de la manipulation des pourcentages. On manipule des multiplication et pas des additions !

3. En notant r le rayon initial, on a l'aire du disque qui est $\mathscr{A}_0 = \pi r^2$

L'aire du cercle avec le rayon agrandit est alors $\mathscr{A}_1 = \pi\,(1{,}22r)^2 \approx 1{,}49\pi r^2 = 1{,}49\mathscr{A}_0$

$\boxed{\text{Donc l'aire du disque augmente de } 49\,\% \text{ et la réponse est FAUSSE}}$

Analyse

4. Avec la définition de F, on a $F(1) = \displaystyle\int_0^1 e^{-t^2}\mathrm{d}t$

On a $\forall x \in [0,1],\ \dfrac{1}{e} \leqslant e^{-t^2}$, ce qui nous assure bien que $\dfrac{1}{e} \leqslant F(1)$

Par ailleurs, on a $\forall x \in [0,1],\ e^{-t} \leqslant e^{-t^2}$

Et $\displaystyle\int_0^1 e^{-t}\mathrm{d}t = -\left[\frac{1}{e^t}\right]_0^1 = -\left(\frac{1}{e} - 1\right) = 1 - \frac{1}{e}$

On a donc également $1 - \dfrac{1}{e} \leqslant F(1)$

$\boxed{\text{La proposition est FAUSSE}}$

5. Procédons à une intégration par parties pour évaluer $A(t)$

$$A(t) = \int_1^t x^2 \ln(x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}\ln(x)\right]_1^t - \int_1^t \frac{x^3}{3} \times \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \frac{t^3}{3}\ln(t) - \int_1^t \frac{x^2}{3}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{t^3}{3}\ln(t) - \left[\frac{x^3}{9}\right]_1^t = \frac{t^3}{3}\ln(t) - \frac{t^3}{9} + \frac{1}{9} = \frac{t^3}{3}\left(\ln(t) - \frac{1}{9}\right) + \frac{1}{9}$$

Ce qui nous donne $\dfrac{A(t)}{t^2} = \dfrac{t}{3}\left(\ln(t) - \dfrac{1}{2}\right) + \dfrac{1}{6t^2}$

Et donc $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{A(t)}{t^2} = +\infty$. La proposition est VRAIE

6. Il faut faire attention à l'ordre des quantificateurs !
Pour conclure qu'une suite tend vers $+\infty$, on a : $\forall A \in \mathbb{R},\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0,\ u_n \geqslant A$

En fixant n_0 au début de l'assertion, on obtient que : $\forall A \in \mathbb{R},\ u_{n_0} \geqslant A$!

La proposition est FAUSSE

Arithmétique

7. On pose la division !

$$\begin{array}{r|l} 3 & 11 \\ \hline 30 & 0,27\ldots \\ 80 & \\ 3 & \end{array}$$

Attention, la question propose une écriture décimale finie $0{,}272727272727$ alors qu'elle est infinie !

La proposition est FAUSSE

8. $\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$

La proposition est FAUSSE

9. La contraposée de « n^2 pair $\Rightarrow n$ pair » est « n impair $\Rightarrow$ n^2 impair »

<u>Rappel :</u> la contraposée de $p \Rightarrow q$ est « non $q \Rightarrow$ non p ». $q \Rightarrow p$ est la réciproque.

La proposition est FAUSSE

10. Si la somme des chiffres d'un entier naturel est divisible par 3, ce nombre est divisible par 3.
12, 15 ou 21 ne sont pas divisible par 9 alors que la somme des chiffres qui les composent sont divisibles par 3.

La proposition est FAUSSE

11. Si $2a \equiv 2b\ [n]$, alors $2a = k_a n + r$, $k_a \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{N}$ et $r < n$
Et $2b = k_b n + r$, $k_b \in \mathbb{N}$ et $r < n$

D'où $2\left(a-b\right)=\left(k_a-k_b\right)n$ ou encore $a-b=\dfrac{k_a-k_b}{2}n$

La congruence de a et b modulo n dépendra de la parité de $\dfrac{k_a-k_b}{2}$.

La proposition est FAUSSE

12. Nous allons montrer par récurrence que la somme des n premiers nombres impairs est n^2.

Pour $\underline{n=1}$, $\sum_{k=1}^{1} 2k-1=1=1^2$

Ce qui initialise la proposition.

Supposons donc la proposition vraie au rang n et étudions le rang $n+1$:

$$\sum_{k=1}^{n+1} 2k-1=n^2+2(n+1)-1=n^2+2n+1=(n+1)^2$$

Ce qui confirme la validité de notre proposition.

Donc la proposition (de l'énoncé) est FAUSSE

<u>Remarque :</u> pour répondre à la question, et surtout pendant un concours, il suffit de prendre un contre-exemple !

13. On considère 3 entiers a, b et c tels que $a^2=b^2+c^2$

Nous allons raisonner modulo 5.

Regardons le comportement du carré d'un nombre entier a, qu'on peut écrire
$a=5k+r,\ k\in\mathbb{Z},\ 0\leqslant r<5$

$$a^2=\left(5k+r\right)^2=25k^2+10kr+r^2=5K+r^2,\ K\in\mathbb{N}.$$

On en déduit le tableau :

a	0	1	2	3	4
a^2	0	1	-1	-1	1

Vérifions maintenant le comportement de la somme de 2 carrés :

$c^2\backslash b^2$	-1	0	1
-1	-2	-1	0
0	-1	0	1
1	0	1	2

Distinguons maintenant 2 cas :

Si $a^2\equiv 0\,[5]$, alors $a\equiv 0\,[5]$ et la proposition est vérifiée immédiatement.

Si $a^2\equiv 1\,[5]$ ou $a^2\equiv -1\,[5]$, le tableau ci-dessus nous indique que $b\equiv 0\,[5]$ ou $c\equiv 0\,[5]$

Donc la proposition est VRAIE

Géométrie

14. Notons α la mesure du plus petit angle. Les autres angles du triangle mesurent donc 2α et 3α

Connaissant la somme de ces valeurs, on a $\alpha + 2\alpha + 3\alpha = 180$.
Donc $6\alpha = 180$
Et finalement $\alpha = 30$

$\boxed{\text{On trouve bien que le plus grand angle vaut } 3\alpha = 90 \text{ et la proposition est VRAIE}}$

15. On considère la rotation r de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$.
Par construction, on a $r\left(C\right) = E$ et $r\left(D\right) = B$
Donc $r\left(\left[CD\right]\right) = \left[EB\right]$

Comme les rotations conservent les distances, on a bien $CD = EB$

$\boxed{\text{Donc la proposition est VRAIE}}$

16. Par définition des droites, un vecteur directeur de chacune d'entre elle est :
Pour D : $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix}$
Pour D' : $\overrightarrow{u'}\begin{pmatrix}1\\-1\\-5\end{pmatrix}$

On constate immédiatement qu'ils ne sont pas colinéaires.

Vérifions maintenant si elles sont sécantes.
On a déjà : $\forall t \in \mathbb{R},\ x = x'$ et $y = y'$
Regardons si on peut également avoir $z = z'$:
$5 - 2t = -5t - 1$
$3t = -6$
$t = -2$

Les 2 droites passent donc par le point $\begin{pmatrix}-1\\5\\9\end{pmatrix}$

$\boxed{\text{Elles sont donc coplanaires et la proposition est VRAIE}}$

17. Déterminons une équation paramétrique du plan (ABG) à partir des éléments :
$A\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$

Cela donne
$\begin{cases}x = 1 - t'\\ y = t\\ z = t'\end{cases}$ avec $(t, t') \in \mathbb{R}^2$

En prenant $t = -10$ et $t' = -8$, on trouve bien que $K \in (ABG)$

Dénombrement - Probabilités

18. Soit $n > 0$ le nombre d'éléments de E.
Le nombre de parties de E ne contenant pas a est donc le nombre de parties d'un ensemble contenant $n - 1$ élément(s). Il y en a donc 2^{n-1}.
Une partie de E contenant a est une partie de E ne contenant pas a à laquelle on ajoute a. Il y en a donc le même nombre !

La proposition est VRAIE

19. Un chemin le plus court signifie qu'on avance ou on monte à chaque déplacement : on monte de 3 cases et on va à droite de 7 cases, sans jamais reculer, pour un total de 10 déplacement.

Le nombre de chemins va donc être déterminé par le positionnement des 3 vers le haut ou des 7 vers la droite parmi les 10 :
$$\binom{10}{3} = \binom{10}{7} = \frac{10!}{3! \times 7!} = \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2 \times 1} = 120$$

La proposition est VRAIE

20. Pour une loi de Poisson X de paramètre λ, on a $E(X) = \lambda$
Dans notre cas, on a $\lambda = 8$.
On a donc : $P\left(X = k\right) = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!} = e^{-8}\dfrac{8^k}{k!}$
Et $P(X \geqslant 3) = 1 - P(X < 3) = 1 - \left(P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)\right)$

$$P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = e^{-8}(1 + 8 + 32) \approx 0{,}01$$

La proposition est VRAIE

21. A et B sont indépendants, donc $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$
Reprenons la démonstration de la propriété du cours disant que si A et B sont indépendants alors $\overline{A}$ et B sont également indépendants :
$B = A \cap B + \overline{A} \cap B$
Donc $P(B) = P(A \cap B) + P\left(\overline{A} \cap B\right) = P(A) \times P(B) + P\left(\overline{A} \cap B\right)$
D'où $P\left(\overline{A} \cap B\right) = P(B)\left(1 - P(A)\right) = P\left(\overline{A}\right) \times P(B)$

Et donc $\overline{A}$ et B sont indépendants.

On peut reproduire le même raisonnement pour conclure de la même façon que $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.

La réciproque se démontre par symétrie entre les évènements et leurs contraires.

Ainsi la proposition est VRAIE

22. On va définir n variables aléatoires X_k (1 par urne) avec 2 valeurs possibles : 1 si la boule b_k est dans l'urne u_k et 0 sinon.

On a $P\left(X_k = 0\right) = \dfrac{n-1}{n}$ et $P\left(X_k = 1\right) = \dfrac{1}{n}$
Et donc $E\left(X_k\right) = 0 \times \dfrac{n-1}{n} + 1 \times \dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{n}$

En considérant la variable $X = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$, par linéarité de l'espérance, on obtient :

$$E(X) = E\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \sum_{k=1}^{n} E\left(X_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} = 1$$

La proposition est VRAIE

23. Le programme ne va pas fonctionner (et il va boucler à l'infini) car le positionnement de m comme moyenne de a et b est situé en dehors de la boucle while !

On peut proposer cette version qui donne un résultat entre $1{,}118$ et $1{,}119$

from math import *

```
def f(x):
      return exp(0.5*x)+x**2-3

def encadrement(a,b,epsilon):
      m=(a+b)/2
      while b-a > epsilon:
            if f(a)*f(m)<0:
                  b=m
            else:
                  a=m
            m=(a+b)/2
            print(a,b)
      return a, b
```

La proposition est FAUSSE

Problème 2

Le modèle logistique discret

Le cas $0 < a \leqslant 1$

1. f_a est définie par $\forall x \in [0,1],\ f_a(x) = a\,x\,(1-x)$
f_a et une fonction polynomiale donc dérivable sur $[0,1]$.

$\forall x \in [0,1],\ f'_a(x) = a\,(1-x) - a\,x = a\,(1-2x)$
Comme $a > 0, f'_a(x)$ est du signe de $1-2x$

Ce qui nous donne le tableau de variations :

x	0		$1/2$		1
$f'_a(x)$		$+$	0	$-$	
$f_a(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{a}{4}$	$\searrow$	0

2. On sait que $0 < u_0 < M$ et donc $v_0 = \dfrac{u_0}{M} \in [0,1]$

Ce qui initialise notre récurrence pour montrer la proposition : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n \in [0,1]$.

Supposons que la proposition soit vraie à un rang n et étudions le rang $n+1$:
D'après la question précédente, si $v_n \in [0,1], f\left(v_n\right) \in [0,1]$
Comme $v_{n+1} = f\left(v_n\right)$, on conclut bien que $v_{n+1} \in [0,1]$

Ce qui nous permet de confirmer l'hérédité de la proposition.

$\boxed{\text{On peut donc conclure que } \forall n \in \mathbb{N},\ v_n \in [0,1]}$

<u>Remarque :</u> la question est un peu étonnante, par construction de $\left(v_n\right)$, on sait qu'elle est bornée entre 0 et 1.

3. Si $\left(v_n\right)$ converge vers une limite réelle l alors la sous suite extraite $\left(v_{n+1}\right)$ va aussi converger vers l
De plus, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l$, donc par continuité de f_a (sur $\mathbb{R}$, donc en particulier en l), $\lim\limits_{n\to+\infty} f_a\left(v_n\right) = f_a\left(l\right)$.

Mais comme $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = f_a\left(v_n\right)$, on conclut que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_{n+1} = f_a\left(l\right)$.

Par unicité de la limite, on conclut que $f_a\left(l\right) = l$.

<u>Rappel :</u> cette démonstration de cours doit faire intervenir les 2 points fondamentaux : continuité de la fonction et unicité de la limite.

$\boxed{\text{Et donc, si } \left(v_n\right) \text{ converge vers une limite réelle } l \text{ alors } f_a\left(l\right) = l.}$

4. Pour répondre à cette question, nous allons étudier rapidement g_a, qui est également dérivable, comme fonction polynomiale. Les points fixes de f_a étant les racines de g_a.

Comme $a \neq 0$ par hypothèse :

$$\forall x \in [0,1],\ g_a'(x) = f_a'(x) - 1 = a(1-2x) - 1 = a\left(1 - 2x - \frac{1}{a}\right)$$

De plus $0 < a \leqslant 1$, donc $1 - \dfrac{1}{a} \leqslant 0$ et $-2x \leqslant 0$ (et même $-2x < 0$ pour $x \neq 0$)

Donc g_a est strictement décroissante sur $[0,1]$.

Comme $g_a(0) = f_a(0) - 0 = 0$, $\forall x \in]0,1]$, $g_a(x) < 0$.

$\boxed{\text{Donc } 0 \text{ est l'unique point fixe de } f_a \text{ sur } [0,1].}$

5. Je ne reviens pas sur ce point, la question a été traitée en même temps que la précédente.
On a d'ailleurs noté que l'inégalité était stricte sur l'intervalle ouvert.

6. Etudions la différence de 2 termes consécutifs de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} - v_n = f_a(v_n) - v_n = g_a(v_n)$$

Or, comme $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n \in [0,1],\ g_a(v_n) \leqslant 0$

$\boxed{\text{Et donc } (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante.}}$

7. D'après les questions précédente, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée, donc convergente vers un point fixe de f_a.

$\boxed{\text{Donc } (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } 0.}$

8. Le modèle prédit que la population va diminuer jusqu'à s'éteindre.

Le cas $a = \dfrac{5}{2}$

9. Comme la va leur de a est fixée, nous pouvons directement chercher les racines de g.

$$\forall x \in [0,1],\ g(x) = \frac{5}{2}x(1-x) - x = \frac{1}{2}x(3-5x)$$

$\boxed{g \text{ admet donc 2 racines } 0 \text{ et } \frac{3}{5} \text{ qui sont bien dans } [0,1].}$

10. $v_0 = \dfrac{1}{2}$

$$v_1 = \frac{5}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{5}{8}$$

$$v_2 = \frac{5}{2} \times \frac{5}{8} \times \frac{3}{8} = \frac{75}{128} \approx 0{,}586$$

$$v_3 = \frac{5}{2} \times \frac{75}{128} \times \frac{53}{128} = \frac{19875}{32768} \approx 0{,}607$$

La notation fractionnaire devient un peu lourde, on donnera uniquement une valeur approchée $v_4 \approx 0{,}597$

11. Je propose le script très simple :

```
def suite():
    v=0.5
    for i in range(10):
        v=2.5*v*(1-v)
        print(v)
        i+=1
    return v
```

On obtient le résultat suivant :

```
0.625
0.5859375
0.606536865234375
0.5966247408650815
0.6016591486318896
0.5991635437485985
0.6004164789780495
0.5997913268741273
0.6001042277017528
0.599947858990589
```

Et donc $v_{10} \approx 0{,}6$

<u>Remarque :</u> on en profite évidemment pour vérifier les résultats de la question précédente ! (Au moins que c'est concordant).

12. Je n'arrive pas à reproduire le schéma sur géogébra, mais je pense que la lecture graphique n'est pas le plus compliqué.

13. On a $\forall x \in [0,1],\ h(x) = f \circ f(x) - x = \frac{5}{2}\left(\frac{5}{2}x(1-x)\right)\left(1 - \frac{5}{2}x(1-x)\right) - x$

$$= \frac{5}{2}\left(\frac{5}{2}x(1-x) - \frac{25}{4}x^2(1-x)^2 - \frac{2}{5}x\right) = \frac{5}{2}x\left(\frac{1}{20}\left(50 - 50x - 125x(1-x)^2 - 8\right)\right)$$
$$= \frac{1}{8}x\left(42 - 175x + 125x^3 - 250x^2\right)$$

<u>Remarque :</u> comme l'énoncé nous indique la solution, on vérifie que le développement de la solution donne bien la même chose que notre développement. C'est bien le cas, je n'insiste pas !

Et finalement, $\forall x \in [0,1],\ h(x) = -\frac{x(5x-3)(25x^2 - 35x + 14)}{8}$

14. Les 2 premiers termes de l'expression trouvée à la question précédente nous indique que les 2 racines de g sont bien racines de h.

Il faut donc vérifier si le trinôme qui apparait dans le 3ème terme a des racines :
$\Delta = 35^2 - 4 \times 25 \times 14 = -175 < 0$
Et le trinôme n'a pas de racine dans $\mathbb{R}$.

Donc g et h ont bien les mêmes racines.

Finalement f et $f \circ f$ ont les mêmes points fixes sur $[0,1]$.

15. Sur $\left[0, \frac{3}{5}\right]$, $x \geqslant 0$, $5x - 3 \leqslant 0$ et $25x^2 - 35x + 14 \geqslant 0$

<u>Remarque :</u> je donne ce « mantra » que j'ai gardé en tête depuis le lycée : un trinôme est du signe de a sauf entre les racines.

Donc $\forall x \in \left[0, \frac{3}{5}\right], h(x) \geqslant 0$

16. Etudions la différence de 2 éléments consécutifs de $\left(v_{2n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ en notant déjà que :
$\forall n \in \mathbb{N}, v_{2(n+1)} = v_{2n+2} = f \circ f\left(v_{2n}\right)$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, v_{2(n+1)} - v_{2n} = f \circ f\left(v_{2n}\right) - v_{2n} = h\left(v_{2n}\right) \geqslant 0.$

La stabilité proposé dans l'énoncé nous permet de démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, v_{2n} \in \left[\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right]$

car v_0 est dans cet intervalle.

<u>Remarque :</u> je ne sais pas si c'est nécessaire de le faire en détail, car la démonstration est la même que dans la première partie.

Et donc $\left(v_{2n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

17. $\left(v_{2n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par $\frac{3}{5}$ donc converge vers un point fixe de $f \circ f$ de $\left[\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right]$.

Et donc $\left(v_{2n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\frac{3}{5}$

18. Étudions la différence $v_{2n+1} - v_{2n}$
$v_{2n+1} - v_{2n} = f\left(v_{2n}\right) - v_{2n} = g\left(v_{2n}\right)$

Or, d'après la question précédente, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_{2n} = \frac{3}{5}$ qui est un point fixe de f et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} g\left(v_{2n}\right) = 0$

Cela permet de conclure que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_{2n+1} = \frac{3}{5}$

Et finalement $\lim\limits_{n\to+\infty} v_{2n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} v_{2n} = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \frac{3}{5}$

19. À partir d'une population de $\frac{M}{2}$, celle-ci va évoluer vers une limite de $\frac{3}{5}M$, donc un légère augmentation.

Le modèle logistique continu

20.

a. $\forall z \in \left]0,M\right[,\ \dfrac{\alpha}{z} + \dfrac{\beta}{M-z} = \dfrac{\alpha\,(M-z)+\beta z}{z\,(M-z)} = \dfrac{\alpha M + \left(\beta-\alpha\right) z}{z\,(M-z)}$

On veut donc

$$\frac{\alpha M + \left(\beta-\alpha\right) z}{z\,(M-z)} = \frac{1}{z\,(M-z)}$$

$\boxed{\text{Par identification : } \alpha = \dfrac{1}{M} \text{ et } \beta = \dfrac{1}{M}}$

Par hypothèse, $\forall t \in \mathbb{R}_+,\ y'(t) = a\,y\,(t)\left(M - y\,(t)\right)$

On peut diviser par $y\,(t)\left(M - y\,(t)\right)$ car les 2 facteurs sont non nuls par hypothèse également :

$$\frac{y'(t)}{y\,(t)\left(M-y\,(t)\right)} = a$$

$\boxed{\text{Et avec la décomposition de la question précédente, } \forall t \in \mathbb{R}_+,\ \alpha\dfrac{y'(t)}{y\,(t)} + \beta\dfrac{y'(t)}{M-y\,(t)} - a = 0}$

b. Comme par hypothèse y est à valeurs positives et majorée par M, une primitive de ψ sur $\mathbb{R}_+$ est :

$$\Psi : t \in \mathbb{R}_+ \mapsto \alpha \ln\left(y\,(t)\right) - \beta \ln\left(M - y\,(t)\right) - at = \ln\left(\frac{\left(y\,(t)\right)^{\alpha}}{\left(M-y\,(t)\right)^{\beta}}\right) - at$$

En reprenant les valeurs de α et β, on obtient :

$\boxed{\text{Une primitive de } \psi \text{ est } \Psi : t \in \mathbb{R}_+ \mapsto \dfrac{1}{M}\ln\left(\dfrac{y\,(t)}{M-y\,(t)}\right) - at}$

<u>Rappel :</u> la formule de la dérivée du logarithme d'une fonction est donnée par $\left(\ln u\right)' = \dfrac{u'}{u}$

21. Les propriétés de y nous indique que $\forall t \in \mathbb{R}_+,\ \psi\,(t) = 0$

Ainsi, il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\dfrac{1}{M}\ln\left(\dfrac{y\,(t)}{M-y\,(t)}\right) - at = k$

Donc $\ln\left(\dfrac{y\,(t)}{M-y\,(t)}\right) = Mk + Mat$

La fonction exponentielle étant bijective cela donne :

$\dfrac{y\,(t)}{M-y\,(t)} = e^{Mk+Mat}$ ou $y\,(t) = e^{Mk+Mat}\left(M - y\,(t)\right)$

D'où $y\,(t) = Me^{Mk+Mat} - e^{Mk+Mat}y\,(t)$

Et finalement $y\,(t) = \dfrac{Me^{Mk+Mat}}{1+e^{Mk+Mat}}$

En posant $c = e^{Mk} > 0$

$$\boxed{\text{On obtient bien } \forall t \in \mathbb{R}_+,\ y(t) = \frac{cMe^{Mat}}{1 + ce^{Mat}},\ c > 0}$$

22. On a $a > 0$ et $M > 0$, donc $\lim_{t \to +\infty} e^{Mat} = +\infty$

Donc $\lim_{t \to +\infty} \frac{cMe^{Mat}}{1 + ce^{Mat}} = M$

$$\boxed{\text{Et finalement } \lim_{t \to +\infty} y(t) = M}$$

23. La population va donc évoluer pour tendre vers sa borne supérieure.

Un modèle proies-prédateurs discret

24.
a. On peut écrire directement :

$$\boxed{\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}}$$

b. Nous allons procéder par récurrence pour montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$

On initialise la démonstration en notant que par définition de A on peut écrire
$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = A^1 \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$

Supposons la proposition vraie au rang n et étudions le rang $n + 1$:
$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A \times A^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = A^{n+1} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$
Ce qui nous permet de confirmer l'hérédité de la proposition.

$$\boxed{\text{On conclut donc que } \forall n \in \mathbb{N},\ \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}}$$

25.
a. Déterminons le polynôme caractéristique de A :
$A - XI_2 = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - X & -\alpha \\ \alpha & 1 - X \end{pmatrix}$

Donc $\chi_A(X) = \det\left(A - XI_2\right) = (1 - X)^2 + \alpha^2$

Les valeurs propres de A sont les solutions de $\chi_A(X) = 0$
$\chi_A(X) = 0 \Leftrightarrow (1 - X)^2 + \alpha^2 = 0$
$\Rightarrow (1 - X)^2 = -\alpha^2$
$\Rightarrow 1 - X = \pm i\alpha$

$$\boxed{\text{Les valeurs propres de } A \text{ sont } \lambda = 1 + i\alpha \text{ et } \mu = 1 - i\alpha}$$

b. λ et μ sont bien symétrique par rapport à l'axe des abscisses, ce qui nous assure de pouvoir écrire $\lambda = re^{i\theta}$ et $\mu = re^{-i\theta}$.

On a $r = \|\lambda\| = \|\mu\| = \sqrt{1+\alpha^2}$.

Finalement, $\lambda = re^{i\theta}$ et $\mu = re^{-i\theta}$ avec $r = \sqrt{1+\alpha^2}$

26. A admet 2 valeurs propres distinctes, elle est donc diagonalisable.

Cela signifie qu'il existe une matrice inversible $P \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ telle que $A = P\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \mu\end{pmatrix}P^{-1}$

27. Nous devons maintenant déterminer les vecteurs propres de A :

$\begin{pmatrix}1 & -\alpha\\ \alpha & 1\end{pmatrix}X_1 = \lambda X_1$

Et donc $\begin{pmatrix}x_1 - \alpha y_1\\ \alpha x_1 + y_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1 + i\alpha x_1\\ y_1 + i\alpha y_1\end{pmatrix}$

On doit donc résoudre le système $\begin{cases}-y_1 = ix_1\\ x_1 = iy_1\end{cases}$, qui donne $X_1 = \begin{pmatrix}1\\ -i\end{pmatrix}$.

on va obtenir de la même façon $X_2 = \begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix}$

Et finalement $P = \begin{pmatrix}1 & 1\\ -i & i\end{pmatrix}$

Ce qui donne $\det P = 2i$ et $P^{-1} = \dfrac{1}{2i}\begin{pmatrix}i & -1\\ i & 1\end{pmatrix} = \dfrac{-i}{2}\begin{pmatrix}i & -1\\ i & 1\end{pmatrix} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & i\\ 1 & -i\end{pmatrix}$

Ainsi $P = \begin{pmatrix}1 & 1\\ -i & i\end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & i\\ 1 & -i\end{pmatrix}$

28. Démontrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = P\begin{pmatrix}\lambda^n & 0\\ 0 & \mu^n\end{pmatrix}P^{-1}$

Initialisons avec $n = 2$:

$A^2 = P\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \mu\end{pmatrix}P^{-1}\times P\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \mu\end{pmatrix}P^{-1} = P\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \mu\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \mu\end{pmatrix}P^{-1} = P\begin{pmatrix}\lambda^2 & 0\\ 0 & \mu^2\end{pmatrix}P^{-1}$

Considérons maintenant la proposition vraie au rang n et étudions le rang $n+1$:

$A^{n+1} = A\times A^n = P\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \mu\end{pmatrix}P^{-1}\times P\begin{pmatrix}\lambda^n & 0\\ 0 & \mu^n\end{pmatrix}P^{-1} = P\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \mu\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda^n & 0\\ 0 & \mu^n\end{pmatrix}P^{-1} = P\begin{pmatrix}\lambda^{n+1} & 0\\ 0 & \mu^{n+1}\end{pmatrix}P^{-1}$

Ce qui confirme l'hérédité de la proposition.

Donc $\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = P\begin{pmatrix}\lambda^n & 0\\ 0 & \mu^n\end{pmatrix}P^{-1}$

29. Pour $n \in \mathbb{N}$:

$A^n = P\begin{pmatrix}\lambda^n & 0\\ 0 & \mu^n\end{pmatrix}P^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -i & i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda^n & 0\\ 0 & \mu^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & i\\ 1 & -i\end{pmatrix} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}\lambda^n & \mu^n\\ -i\lambda^n & i\mu^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & i\\ 1 & -i\end{pmatrix}$

$= \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}\lambda^n + \mu^n & i\lambda^n - i\mu^n\\ -i\lambda^n + i\mu^n & \lambda^n + \mu^n\end{pmatrix}$

D'où on obtient

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \lambda^n + \mu^n & i\lambda^n - i\mu^n \\ -i\lambda^n + i\mu^n & \lambda^n + \mu^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \left(\lambda^n + \mu^n\right) x_0 + i\left(\lambda^n - \mu^n\right) y_0 \\ -i\left(\lambda^n - \mu^n\right) x_0 + \left(\lambda^n + \mu^n\right) y_0 \end{pmatrix}$$

Or, $\lambda^n = r^n e^{in\theta}$ et $\mu^n = r^n e^{-in\theta}$.

$$x_n = \frac{1}{2}\left(\left(\lambda^n + \mu^n\right) x_0 + i\left(\lambda^n - \mu^n\right) y_0\right) = r^n \left(\frac{e^{in\theta} + e^{-in\theta}}{2} x_0 + i\frac{e^{in\theta} - e^{-in\theta}}{2} y_0\right)$$

$$= r^n \left(\cos(n\theta) x_0 - \sin(n\theta) y_0\right)$$

$$y_n = \frac{1}{2}\left(-i\left(\lambda^n - \mu^n\right) x_0 + \left(\lambda^n + \mu^n\right) y_0\right) = r^n \left(-i\frac{e^{in\theta} - e^{-in\theta}}{2} x_0 + \frac{e^{in\theta} + e^{-in\theta}}{2} y_0\right)$$

$$= r^n \left(\sin(n\theta) x_0 + \cos(n\theta) y_0\right)$$

Et donc $x_n = r^n \left(\cos(n\theta) x_0 - \sin(n\theta) y_0\right)$ et $y_n = r^n \left(\sin(n\theta) x_0 + \cos(n\theta) y_0\right)$

<u>Rappel :</u> on utilise les formules suivantes pour un angle α : $\cos(\alpha) = \dfrac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2}$ *et* $\sin(\alpha) = \dfrac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}$.

30. On voit sur le graphique les évolutions liées entre la hausse des prédateurs qui entraîne la baisse des proies, qui à son tour entraîne une baisse des prédateurs… Avec une augmentation globale de la population.

31. $x_n^2 + y_n^2 = r^{2n}\left(\cos(n\theta) x_0 - \sin(n\theta) y_0\right)^2 + r^{2n}\left(\sin(n\theta) x_0 + \cos(n\theta) y_0\right)^2$

$$= r^{2n}\left(x_0^2\left(\cos^2(n\theta) + \sin^2(n\theta)\right) + y_0^2\left(\cos^2(n\theta) + \sin^2(n\theta)\right) + 2\cos(n\theta)\sin(n\theta) x_0 y_0 - 2\cos(n\theta)\sin(n\theta) x_0 y_0\right)$$

Et donc $x_n^2 + y_n^2 = r^{2n}\left(x_0^2 + y_0^2\right)$

Comme $r > 1$ d'après la question 25, on conclut que $x_n^2 + y_n^2$ tend vers l'infini !

Cela implique que les 2 populations ne peuvent pas être bornées.

Ce modèle n'est donc pas réaliste, il ne prend pas en compte les contraintes extérieures aux 2 populations.