Bac 2024 - Métropole 1 - corrigé

Exercice 1

1. Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5x\mathrm{e}^{-x}$

Quand $x \to +\infty$, $\mathrm{e}^{-x} \to 0$ et on est face à une forme indéterminée.
Mais par croissance comparée (entre une fonction polynomiale et une fonction exponentielle), on peut affirmer que $5x\mathrm{e}^{-x} \to 0$

Ce qui signifie que l'axe des abscisses est une asymptote horizontale à C_f.

L'affirmation 1 est VRAIE.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions qui le sont et :
$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 5\mathrm{e}^{-x} - 5x\mathrm{e}^{-x}$

<u>*Remarque :*</u> *on aurait tendance à factoriser si l'exercice portait sur l'étude détaillée de f, mais cette forme est la plus pratique pour répondre à la question posée.*

On a donc $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) + f(x) = 5\mathrm{e}^{-x} - 5x\mathrm{e}^{-x} + 5x\mathrm{e}^{-x} = 5\mathrm{e}^{-x}$

Ainsi, l'affirmation 2 est VRAIE.

2. On a l'hypothèse $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$ et également que (u_n) converge vers -1 et (w_n) converge vers 1

N'ayant pas plus de détails, on ne peut pas connaitre le rang exact, mais à partir d'un certain rang n_0, la suite de terme générique $v_n = \dfrac{1}{2}(-1)^n$ respectera l'inégalité $\forall n \geqslant n_0,\ u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$. Et cette suite ne converge pas.

L'affirmation 3 est FAUSSE.

Comme (u_n) est croissante et (w_n) décroissante, on peut écrire :
$\forall n \in \mathbb{N},\ u_0 \leqslant u_n$
Et $\forall n \in \mathbb{N},\ w_n \leqslant w_0$

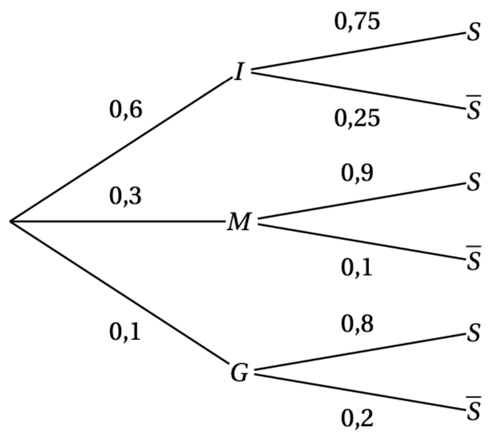
En intégrant cela dans l'inégalité de l'énoncé, on obtient : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_0 \leqslant u_n \leqslant v_n \leqslant w_n \leqslant w_0$

Et donc, cela confirme que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_0 \leqslant v_n \leqslant w_0$

L'affirmation 4 et VRAIE.

Exercice 2

1. D'après l'énoncé, on trouve l'arbre suivant :



2. On cherche la probabilité $P(I \cap S) = P(I) \times P_I(S)$

En lisant l'arbre on obtient : $P(I \cap S) = 0{,}6 \times 0{,}75 = 0{,}45$

La probabilité que le client ait acheté sur internet et soit satisfait du service client est de $0{,}45$.

3. On utilise la formule des probabilités totales pour affirmer que
$P(S) = P(I \cap S) + P(M \cap S) + P(G \cap S)$

Et donc $P(S) = 0{,}45 + 0{,}3 \times 0{,}9 + 0{,}1 \times 0{,}8 = 0{,}45 + 0{,}27 + 0{,}08 = 0{,}8$

On a bien $P(S) = 0{,}8$

4. D'après la formule des probabilités conditionnelles, on a $P(I \cap S) = P(S) \times P_S(I)$

Ce qui nous donne $P_S(I) = \dfrac{P(I \cap S)}{P(S)} = \dfrac{0{,}45}{0{,}8} = 0{,}5625 \approx 0{,}563$

La probabilité qu'une personne satisfaite du service client ait fait son achat sur internet est de $0{,}563$.

5.
a. Chaque évènement « appeler un client » suit une loi de Bernoulli de paramètre $p = 0{,}8$.
Avec l'échantillon de 30 clients, on a donc $n = 30$.

Donc X suit une loin binomiale $\mathscr{B}(30; 0{,}8)$.

b. On cherche la probabilité d'avoir au moins 25 clients satisfaits.
On va donc utiliser la calculatrice et la formule $P\left(X \geqslant 25\right) = 1 - P(X \leqslant 24)$

Or $P(X \leqslant 24) \approx 0{,}5725$

Et donc $P\left(X \geqslant 25\right) \approx 0{,}428$

La probabilité qu'au moins 25 clients soient satisfaits sur un échantillon est donc de $0{,}428$.

6. On cherche donc n tel que $P(X \geqslant 1) > 0{,}99$. Pour cela nous allons utiliser $P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0)$

Or $P(X = 0) = 1 - 0{,}8^n$
On veut donc $1 - 0{,}8^n > 0{,}99$
Ce qui est équivalent à $0{,}8^n < 0{,}01$

En passant au logarithme (qui est une fonction strictement croissante, les quantités étudiées étant strictement positive) :
On cherche $\ln\left(0{,}8^n\right) < \ln(0{,}01) \Leftrightarrow n\ln(0{,}8) < \ln(0{,}01)$

D'où $n > \dfrac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}8)} \approx 20{,}64$

<u>Attention :</u> je fais la remarque à chaque fois dans ces exercices, on divise par une qualité négative donc l'inégalité change de sens.

Il faut donc un échantillon de taille minimale 21 personnes.

7.
a. Par linéarité de l'espérance, on a $E(T) = E\left(T_1 + T_2\right) = E\left(T_1\right) + E\left(T_2\right) = 4 + 3 = 7$

Comme les 2 variables sont indépendantes, on a également
$V(T) = V\left(T_1 + T_2\right) = V\left(T_1\right) + V\left(T_2\right) = 2 + 1 = 3$

Donc $E(T) = 7$ et $V(T) = 3$.

b. On cherche la probabilité de $5 \leqslant T \leqslant 9$, ou encore $4 < T < 10$

Cela donne $4 - E(T) < T - E(T) < 10 - E(T)$
Et d'après la question précédente, $-3 < T - E(T) < 3$ et finalement $\left|T - E(T)\right| < 3$

Or $p\left(\left|T - E(T)\right| < 3\right) = 1 - p\left(\left|T - E(T)\right| \geqslant 3\right)$

En appliquant l'inégalité de Bienaymé-Tchebichev, on sait que $p\left(\left|T - E(T)\right| \geqslant 3\right) \leqslant \dfrac{3}{9} = \dfrac{1}{3}$
Donc $1 - p\left(\left|T - E(T)\right| \geqslant 3\right) \geqslant 1 - \dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{3}$

Et donc $p\left(5 \leqslant T \leqslant 9\right) \geqslant \dfrac{2}{3}$

Exercice 3

1.

a. On a $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-5\\-5\\10\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}-5\\-5\\-\frac{5}{2}\end{pmatrix}$, ce qui confirme bien que les 3 points ne sont pas alignés.

On vérifie rapidement :
$\overrightarrow{n_1}\,.\,\overrightarrow{AC} = -5+5+0 = 0$
Et $\overrightarrow{n_1}\,.\,\overrightarrow{AD} = -5+5+0 = 0$

Donc $\overrightarrow{n_1}$ est orthogonal à 2 vecteurs non colinéaires du plan (CAD).

Donc $\overrightarrow{n_1}$ est orthogonal au plan (CAD).

b. D'après les coordonnées de $\overrightarrow{n_1}$, on sait qu'une équation cartésienne de (CAD) est $x - y + 0z + d = 0$ avec $d \in \mathbb{R}$.

Comme $A\left(5;5;0\right) \in (ACD)$, on trouve $d = 0$

Donc une équation cartésienne de (CAD) est $x - y = 0$.

2.

a. Si H est l'intersection de (CAD) et $\mathscr{D}$, alors ses coordonnées vérifient les 2 équations.

En reprenant les coordonnées de l'équation paramétrique de $\mathscr{D}$ dans l'équation de (CAD), on obtient :
$\frac{5}{2}t - \left(5 - \frac{5}{2}t\right) = 0$ ou $5t - 5 = 0$

Ce qui donne $t = 1$.

Et donc on obtient les coordonnées $H\left(\frac{5}{2};\frac{5}{2};0\right)$.

b. Nous devons vérifier que $\overrightarrow{BH}$ est orthogonal à (CAD), ou autrement dit qu'il est colinéaire à $\overrightarrow{n_1}$.

Or $\overrightarrow{BH}\begin{pmatrix}\frac{5}{2}\\-\frac{5}{2}\\0\end{pmatrix} = \frac{5}{2}\overrightarrow{n_1}$

Cela nous indique bien que H est le projeté orthogonal de B sur (CAD).

3.

a. A et H sont dans le plan (CAD), on a donc $\overrightarrow{BH} \perp \overrightarrow{AH}$ d'après la question précédente.

Rappel : comme $\overrightarrow{BH}$ est orthogonal à (CAD), il est orthogonal à tous les vecteurs de ce plan.

Ainsi ABH est rectangle en H.

b. Notons $\mathscr{B}$ l'aire de ABH (j'utilise cette lettre car on va l'utiliser dans la question suivante !)

On sait que $\mathscr{B} = \dfrac{AH \times BH}{2}$

Or $AH^2 = \left(5 - \dfrac{5}{2}\right)^2 + \left(5 - \dfrac{5}{2}\right)^2 + 0 = 2 \times \left(\dfrac{5}{2}\right)^2 = \dfrac{25}{2}$

Et $BH^2 = \left(\dfrac{5}{2}\right)^2 + \left(5 - \dfrac{5}{2}\right)^2 + 0 = \dfrac{25}{2}$

Donc $BH = AH = \dfrac{5}{\sqrt{2}}$

$$\boxed{\text{Finalement } \mathscr{B} = \frac{\frac{5}{\sqrt{2}} \times \frac{5}{\sqrt{2}}}{2} = \frac{25}{4}}$$

4.

a. On a $\overrightarrow{OC}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{HA}\begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$

On vérifie rapidement (je te laisse faire le calcul !) que $\overrightarrow{OC} . \overrightarrow{HA} = \overrightarrow{OC} . \overrightarrow{BH} = 0$

Donc $\overrightarrow{OC}$ est bien orthogonal au plan (ABH), $O \in (ABH)$ et $C \notin (ABH)$

Remarque : je te laisse rédiger la preuve concernant les 2 points, c'est à base de combinaisons linéaires !

$$\boxed{\text{Donc } (CO) \text{ est la hauteur de } ABCH \text{ issue de } C.}$$

b. Compte-tenu des coordonnées de C, on trouve immédiatement $OC = 10$.

Notons cette fois $\mathscr{V}$ le volume de $ABCH$ et $h = OC$.

$\mathscr{V} = \dfrac{1}{3}\mathscr{B}h = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{25}{4} \times 10 = \dfrac{125}{6}$

$$\boxed{\text{Et donc l'aire de } ABCH \text{ est } \mathscr{V} = \frac{125}{6}}$$

5. Nous allons utiliser le volume calculé précédemment eu prenant ABC pour base et donc la hauteur sera la distance d de H au plan (ABC).

On a $AB = 5$ et $BC = \sqrt{5^2 + 10^2} = \sqrt{125}$

Donc $\dfrac{1}{3} \times \dfrac{5\sqrt{125}}{2} \times d = \dfrac{125}{6}$ ou $\dfrac{25\sqrt{5}}{6}d = \dfrac{125}{6}$

$$\boxed{\text{Et finalement la distance de } H \text{ au plan } (ABC) \text{ est } d = \sqrt{5}.}$$

Exercice 4

Partie A

1.

a. Il n'y a pas de formes indéterminées, et on sait que $\lim_{x \to 0_+} \ln(x) = -\infty$ et que $\lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$

Et donc $\lim_{x \to 0_+} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

b. f est bien dérivable sur $\left]0; +\infty\right[$ comme somme de fonctions qui le sont

Et $\forall x \in \left]0; +\infty\right[,\ f'(x) = 1 + \dfrac{1}{2x} = \dfrac{2x+1}{2x}$.

Donc $\forall x \in \left]0; +\infty\right[,\ f'(x) = \dfrac{2x+1}{2x}$.

c. $\forall x \in \left]0; +\infty\right[,\ 2x + 1 > 0$ et donc $f'(x) > 0$.

Donc f est strictement croissante sur $\left]0; +\infty\right[$

d. Pour étudier la convexité de f, nous allons étudier sa dérivée seconde (f' étant elle-même bien dérivable comme fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas).

$$\forall x \in \left]0; +\infty\right[,\ f''(x) = \frac{4x - 2(2x+1)}{4x^2} = \frac{-1}{4x^2} < 0$$

Ainsi f est concave sur $\left]0; +\infty\right[$

2.

a. D'après la question 1, f est strictement croissante sur $\left]0; +\infty\right[$ et $\lim_{x \to 0_+} f(x) = -\infty$ et

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, on conclut que f admet une racine unique sur $\left]0; +\infty\right[$.

De plus, $f(1) = 1 - 2 = -1 < 0$ et $f(2) = 2 - 2 + \dfrac{1}{2}\ln(2) = \dfrac{1}{2}\ln(2) > 0$

On peut donc affirmer que $\alpha \in [1; 2]$

b. En regroupant les éléments déjà étudiés,

On a $\forall x \in \left]0; \alpha\right[,\ f(x) < 0, f(\alpha) = 0$ et $\forall x \in \left]0; +\infty\right[,\ f(x) > 0$.

c. $f(\alpha) = 0$ nous permet d'écrire $\alpha - 2 + \dfrac{1}{2}\ln(\alpha) = 0$ ou encore $\dfrac{1}{2}\ln(\alpha) = 2 - \alpha$

Et finalement $\ln(\alpha) = 2(2 - \alpha)$.

Partie B

1. g est bien dérivable sur $\left]0;1\right]$ comme somme et produit de fonctions qui le sont.

$\forall x \in \left]0;1\right],\ g'(x) = -\dfrac{7}{4}x + 1 - \dfrac{1}{2}x\ln(x) - \dfrac{1}{4}\dfrac{x^2}{x} = -2x + 1 - \dfrac{1}{2}x\ln(x)$

D'autre part, $\forall x \in \left]0;1\right],\ xf\left(\dfrac{1}{x}\right) = x\left(\dfrac{1}{x} - 2 + \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1}{x}\right)\right) = 1 - 2x - \dfrac{1}{2}x\ln(x)$.

Et donc $\forall x \in \left]0;1\right],\ g'(x) = -2x + 1 - \dfrac{1}{2}x\ln(x) = xf\left(\dfrac{1}{x}\right)$

2.

a. On a $\forall x \in \left]0;\dfrac{1}{\alpha}\right[,\ \dfrac{1}{x} \in \left]\alpha;+\infty\right[$

Et donc $\forall x \in \left]0;\dfrac{1}{\alpha}\right[,\ f\left(\dfrac{1}{x}\right) > 0$

b. D'après la question 1, comme $x \in \left]0;1\right]$, $g'(x)$ est du signe de $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

D'où le tableau de variations :

x	0		$\frac{1}{\alpha}$		1
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

Partie C

1.

a. Calculons la différence entre les 2 fonctions :

$\forall x \in \left]0;1\right],\ g(x) + \dfrac{7}{8}x^2 - x = -\dfrac{7}{8}x^2 + x - \dfrac{1}{4}x^2\ln(x) + \dfrac{7}{8}x^2 - x = -\dfrac{1}{4}x^2\ln(x)$

Or $\forall x \in \left]0;1\right],\ \ln(x) \leqslant 0$ et donc $g(x) + \dfrac{7}{8}x^2 - x \geqslant 0$

Et ainsi, sur $\left]0;1\right]$, $\mathscr{C}_g$ est au-dessus de $\mathscr{P}$.

b. Utilisons une intégration par parties pour calculer l'intégrale demandée :

$$\int_{\frac{1}{\alpha}}^{1} x^2\ln(x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}\ln(x)\right]_{\frac{1}{\alpha}}^{1} - \int_{\frac{1}{\alpha}}^{1}\frac{x^3}{3}\times\frac{1}{x}\mathrm{d}x = -\frac{\left(\frac{1}{\alpha}\right)^3}{3}\ln\left(\frac{1}{\alpha}\right) - \left[\frac{x^3}{9}\right]_{\frac{1}{\alpha}}^{1}$$

$$= \frac{1}{3\alpha^3}\ln(\alpha) - \frac{1}{9} + \frac{\left(\frac{1}{\alpha}\right)^3}{9} = \frac{6(2-\alpha) - \alpha^3 + 1}{9\alpha^3} = \frac{-\alpha^3 - 6\alpha + 13}{9\alpha^3}$$

Et donc, on trouve bien $\displaystyle\int_{\frac{1}{\alpha}}^{1} x^2 \ln(x)\,\mathrm{d}x = \frac{-\alpha^3 - 6\alpha + 13}{9\alpha^3}$

<u>Remarque :</u> l'idée de l'intégration par parties vient assez « naturellement », à défaut d'autre choix évident. Par contre, il ne faut pas partir sur l'idée de dériver la fonction carrée qui pourrait sembler plus simple au premier abord. Les fonctions polynomiales, exponentielles ou trigonométriques peuvent servir pour la dérivation ou l'intégration !

2. En reprenant le résultat de la question 1.a, on a :

$$\mathscr{A} = \int_{\frac{1}{\alpha}}^{1} g(x) + \frac{7}{8}x^2 - x\,\mathrm{d}x = \int_{\frac{1}{\alpha}}^{1} -\frac{1}{4}x^2 \ln(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{4} \times \frac{-\alpha^3 - 6\alpha + 13}{9\alpha^3}$$

Et finalement $\mathscr{A} = \dfrac{\alpha^3 + 6\alpha - 13}{36\alpha^3}$.