

Bac Maroc 2024 - corrigé

Exercice 1

1. Avec la définition de f , on peut écrire :

$$\forall x \in]1; +\infty[, f(x) = \frac{\ln(x)}{x^2 - 1} = \frac{\ln(x)}{(x+1)(x-1)} = \frac{1}{x+1} \times \frac{\ln(x)}{x-1}$$

$$\text{Or } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = \ln'(1) = 1$$

$$\text{Et ainsi, } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \frac{1}{2}$$

Comme on a posé $f(1) = \frac{1}{2}$, on conclut que f est continue à droite en 1.

2. Par croissance comparée, on trouve que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^2 - 1} = 0. \text{ L'axe des abscisses est une asymptote à la courbe } (C).$$

3.

a. Soit $x \in]1; +\infty[$ et $t = (x-1)^2$

On a donc $1-x = -(x-1) = -\sqrt{t}$ car $1-x < 0$

Et $x = 1 + \sqrt{t}$

$$\text{En remplaçant, on obtient bien : } \frac{1-x+\ln(x)}{(x-1)^2} = \frac{-\sqrt{t} + \ln(1+\sqrt{t})}{t}$$

b. Posons $\forall t \in]0; +\infty[, g(t) = -\sqrt{t} + \ln(1+\sqrt{t})$

La fonction g est dérivable sur $]0; +\infty[$ et :

$$\forall t \in]0; +\infty[, g'(t) = -\frac{1}{2\sqrt{t}} + \frac{\frac{1}{2\sqrt{t}}}{1+\sqrt{t}} = \frac{-1-\sqrt{t}+1}{2\sqrt{t}(1+\sqrt{t})} = -\frac{1}{2(1+\sqrt{t})}$$

On note que $\forall t \in]0; +\infty[, g'(t) < 0$

On a donc que $\forall t \in]0; +\infty[, |g'(t)| < \frac{1}{2}$

D'après l'inégalité des accroissements finis :

$$\forall t \in [0; +\infty[, |g(t) - g(0)| < \frac{1}{2}t$$

Or $g(0) = 0$.

On a donc déjà $\forall t \in [0; +\infty], -\frac{1}{2}t < -\sqrt{t} + \ln(1 + \sqrt{t})$

A l'inverse $\forall x \in]0; t], \frac{1}{2(1 + \sqrt{t})} < |g'(x)|$

Et donc $\forall x \in [0; t], \frac{x}{2(1 + \sqrt{t})} < |g(x)|$

En particulier pour $x = t, \frac{t}{2(1 + \sqrt{t})} < |g(t)|$

Comme $\forall t \in]0; +\infty[, g(t) < 0$, on obtient bien : $-\sqrt{t} + \ln(1 + \sqrt{t}) < -\frac{t}{2(1 + \sqrt{t})}$

On arrive donc à l'encadrement $\forall t \in]0; +\infty[, -\frac{1}{2}t < -\sqrt{t} + \ln(1 + \sqrt{t}) < -\frac{t}{2(1 + \sqrt{t})}$

Et finalement, $\forall t \in]0; +\infty[, -\frac{1}{2} < \frac{-\sqrt{t} + \ln(1 + \sqrt{t})}{t} < -\frac{1}{2(1 + \sqrt{t})}$

c. Comme, $\lim_{t \rightarrow 0_+} -\frac{1}{2(1 + \sqrt{t})} = -\frac{1}{2}$

On peut appliquer le théorème des gendarmes pour affirmer que :

$$\lim_{t \rightarrow 0_+} \frac{-\sqrt{t} + \ln(1 + \sqrt{t})}{t} = -\frac{1}{2}$$

En repartant de l'égalité du 3.a,

On conclut que $\lim_{t \rightarrow 1_+} \frac{1 - x + \ln(x)}{(x - 1)^2} = -\frac{1}{2}$

4.

a. Étudions l'expression proposée :

$$\begin{aligned} \forall x \in]1; +\infty[, \frac{f(x) - \frac{1}{2}}{x - 1} &= \frac{\frac{\ln(x)}{x^2 - 1} - \frac{1}{2}}{x - 1} = \frac{2 \ln(x) - x^2 + 1}{2(x^2 - 1)(x - 1)} \\ &= \frac{-(x - 1) \ln(x) + (x + 1) \ln(x) - (x - 1)(x + 1)}{2(x^2 - 1)(x - 1)} \\ &= \frac{-(x - 1) \ln(x) + (x + 1) \ln(x) - (x - 1)(x + 1)}{2(x^2 - 1)(x - 1)} = -\frac{\ln(x)}{x - 1} \times \frac{1}{2(x + 1)} + \frac{\ln(x) - x + 1}{2(x - 1)^2} \end{aligned}$$

Remarque : on « force » l'apparition des différents éléments, en particulier le découpage des $2 \ln(x)$. En remettant les 2 membres de la somme de la réponse au même dénominateur on trouve rapidement le bon agencement.

$$\text{Et donc } \forall x \in]1; +\infty[, \frac{f(x) - \frac{1}{2}}{x-1} = -\frac{\ln(x)}{x-1} \times \frac{1}{2(x+1)} + \frac{\ln(x) - x + 1}{2(x-1)^2}$$

b. Quand $x \rightarrow 1$:

Comme $\ln(1) = 0$, $\frac{\ln(x)}{x-1}$ est le taux d'accroissement de la fonction logarithme en 1 et donc $\frac{\ln(x)}{x-1} \rightarrow 1$

$$\text{Ainsi, } -\frac{\ln(x)}{x-1} \times \frac{1}{2(x+1)} \rightarrow -\frac{1}{4}$$

Et en reprenant le résultat de la question précédente, on trouve que $\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{\ln(x) - x + 1}{2(x-1)^2} = -\frac{1}{4}$

$$\text{Et donc } \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{f(x) - \frac{1}{2}}{x-1} = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{2}$$

On reconnaît l'expression du taux d'accroissement $\frac{f(x) - f(1)}{x-1}$

On conclut donc que f est dérivable à droite en 1 et $f'(1) = -\frac{1}{2}$.

f admet donc une tangente de pente $-\frac{1}{2}$ en $x = 1$.

5.

a. Notons déjà que $\forall t \in [1; +\infty[, \frac{t^2-1}{t^3} \geq 0$ et $\frac{t^2-1}{t^2} \geq 0$

Ce qui implique que $\forall x \in [1; +\infty[, \int_1^x \frac{t^2-1}{t^3} dt \geq 0$ et $\int_1^x \frac{t^2-1}{t^2} dt \geq 0$

On peut donc déjà affirmer que $\forall x \in [1; +\infty[, I(x) \geq 0$ et $J(x) \geq 0$

$$\text{De plus } \forall x \in [1; +\infty[, I(x) - J(x) = \int_1^x \frac{t^2-1}{t^3} dt - \int_1^x \frac{t^2-1}{t^2} dt = \int_1^x \frac{t^2-1}{t^3} - \frac{t^2-1}{t^2} dt$$

$$\int_1^x \frac{t^2-1}{t^2} \left(\frac{1}{t} - 1 \right) dt \leq 0 \text{ (car } \frac{1}{t} - 1 \leq 0 \text{)}.$$

D'où $\forall x \in [1; +\infty[, I(x) \leq J(x)$

Et finalement $\forall x \in [1; +\infty[, 0 \leq I(x) \leq J(x)$

b. Calculons les 2 intégrales :

$$\forall x \in [1; +\infty[, I(x) = \int_1^x \frac{t^2 - 1}{t^3} dt = \int_1^x \frac{1}{t} - \frac{1}{t^3} dt = \left[\ln(t) + \frac{1}{2t^2} \right]_1^x$$

$$= \ln(x) + \frac{1}{2x^2} - \ln(1) - \frac{1}{2} = \ln(x) + \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{2}$$

Ce qu'on peut bien écrire $\forall x \in [1; +\infty[, I(x) = \ln(x) - \frac{x^2 - 1}{2x^2}$

$$\forall x \in [1; +\infty[, J(x) = \int_1^x \frac{t^2 - 1}{t^2} dt = \int_1^x 1 - \frac{1}{t^2} dt = \left[t + \frac{1}{t} \right]_1^x = x + \frac{1}{x} - 1 - 1 = \frac{x^2 - 2x + 1}{x}$$

$\forall x \in [1; +\infty[, J(x) = \frac{(x-1)^2}{x}$

c. f est bien dérivable sur $]1; +\infty[$ comme quotient de fonctions qui le sont et donc le dénominateur ne s'annule pas.

$$\text{Et } \forall x \in]1; +\infty[, f'(x) = \frac{\frac{1}{x}(x^2 - 1) - 2x \ln(x)}{(x^2 - 1)^2} = \frac{(x^2 - 1) - 2x^2 \ln(x)}{x(x^2 - 1)^2}$$

$$\begin{aligned} \text{D'un autre côté } \frac{-2}{(x+1)^2} \times \frac{I(x)}{J(x)} &= \frac{-2}{(x+1)^2} \times \frac{\ln(x) - \frac{x^2-1}{2x^2}}{\frac{(x-1)^2}{x}} = \frac{-2}{(x+1)^2} \times \frac{x 2x^2 \ln(x) - x(x^2-1)}{2x^2(x+1)^2} \\ &= \frac{-2}{(x+1)^2} \times \frac{2x^2 \ln(x) - (x^2-1)}{2x(x-1)^2} = \frac{(x^2-1) - 2x^2 \ln(x)}{x(x^2-1)^2} \end{aligned}$$

Et ainsi, $\forall x \in]1; +\infty[, f'(x) = \frac{-2}{(x+1)^2} \times \frac{I(x)}{J(x)}$

Remarque : on travaille avec 1 exclu, donc il n'y a pas de problème de définition des quotients.

d. On note déjà que dans l'expression $f'(x) = \frac{-2}{(x+1)^2} \times \frac{I(x)}{J(x)}$ tous les facteurs sont strictement positifs pour $x > 1$ (je te laisse vérifier si besoin !). Donc le « - » nous assure que $\forall x \in]1; +\infty[, f'(x) < 0$.

De plus, d'après la question 5.a, $0 < \frac{I(x)}{J(x)} \leq 1$ et $(x+1)^2 \geq (1+1)^2 = 4$

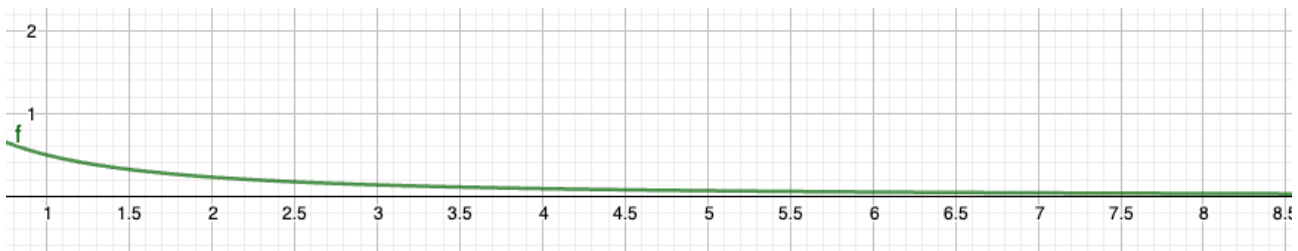
Finalement, on peut encadrer $\forall x \in]1; +\infty[, -\frac{1}{2} \leq f'(x) \leq 0$

6. En reprenant les éléments, on constate que le tableau de variations de f est relativement simple, puisque la fonction est strictement décroissante entre $\frac{1}{2}$ et 0

D'où le tableau :

x	1	$+\infty$
$f'(x)$	—	
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	0

Et la courbe (C) :



7. Considérons la fonction h définie sur $]1; +\infty[$ par
 $\forall x \in]1; +\infty[, h(x) = f(x) - x + 1$

Cette fonction est bien dérivable sur $]1; +\infty[$ et :
 $\forall x \in]1; +\infty[, h'(x) = f'(x) - 1 < 0$
 Donc h est strictement décroissante sur $]1; +\infty[$

De plus, $h(1) = f(1) - 1 + 1 = \frac{1}{2} > 0$

Et $h(2) = f(2) - 2 + 1 = \frac{\ln(2)}{2^2 - 1} - 1 = \frac{\ln(2)}{3} - 1 \approx 0,77 < 0$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, $h(x) = 0$ admet une unique solution dans $]1; 2[$.

Et par définition de h , on conclut que $f(x) = x - 1$ admet une unique solution dans $]1; 2[$.

8.

a. Remarquons déjà rapidement que la suite (a_n) est bien définie, car f est à valeurs strictement positive, donc $1 + f(a_n)$ est bien supérieur à 1.

Par définition de a et de (a_n) , on peut écrire : $a_{n+1} - a = 1 + f(a_n) - f(a) - 1 = f(a_n) - f(a)$

En 5.d, on a vu que $\forall x \in]1; +\infty[, |f'(x)| \leq \frac{1}{2}$. On peut à nouveau utiliser le théorème des accroissements finis pour affirmer que :

$\forall x \in]1; +\infty[, |f(a_n) - f(a)| \leq \frac{1}{2} |a_n - a|$

Ainsi on obtient bien $\forall n \in \mathbb{N}, |a_{n+1} - a| \leq \frac{1}{2} |a_n - a|$.

b. La proposition à démontrer est $\forall n \in \mathbb{N}, |a_n - a| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |a_0 - a|$

Initialisation :

Au rang $n = 0$, nous avons trivialement $|a_0 - a| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^0 |a_0 - a| = |a_0 - a|$

Hérédité :

Supposons la proposition vraie au rang n et étudions le rang $n + 1$.

D'après la question précédente, $|a_{n+1} - a| \leq \frac{1}{2} |a_n - a|$

Et d'après l'hypothèse de récurrence, $|a_n - a| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |a_0 - a|$

Ainsi, $|a_{n+1} - a| \leq \frac{1}{2} |a_n - a| \leq \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n |a_0 - a| = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} |a_0 - a|$

Ce qui confirme bien l'hérédité de la proposition.

On conclut donc que $\forall n \in \mathbb{N}, |a_n - a| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |a_0 - a|$

c. Comme $\frac{1}{2} < 1$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$

Ainsi, $\lim_{n \rightarrow +\infty} |a_n - a| = 0$

Et donc (a_n) converge vers a .

Exercice 2

1.

a. D'après le théorème fondamental de l'analyse, comme $f : t \mapsto e^{t^2}$ est continue sur $[0; 1]$, F est une primitive de f .

Donc F est dérivable sur $[0; 1]$ et $\forall x \in [0; 1], F'(x) = e^{x^2} > 0$

Donc F est continue et strictement croissante sur $[0; 1]$.

b. Comme F est strictement croissante, elle représente bien une bijection.

De plus $F(0) = \int_0^0 e^{t^2} dt = 0$ et $F(1) = \int_0^1 e^{t^2} dt = \beta$

Et donc F est une bijection entre $[0; 1]$ et $[0; \beta]$.

2.

a. On note $\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n F^{-1}\left(\frac{k}{n}\beta\right)$

On reconnaît la formule de Riemann (au facteur β près qui nous donne) :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\beta}{n} \sum_{k=1}^n F^{-1} \left(\frac{k}{n} \beta \right) = \int_0^\beta F^{-1}(t) dt$$

Et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n F^{-1} \left(\frac{k}{n} \beta \right) = \frac{1}{\beta} \int_0^\beta F^{-1}(t) dt$

Autrement dit, $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{1}{\beta} \int_0^\beta F^{-1}(t) dt$

Donc (S_n) converge vers $l = \frac{1}{\beta} \int_0^\beta F^{-1}(t) dt$

b. Effectuons le changement de variable proposé $u = F^{-1}(t)$

D'où $dt = F'(u) du = e^{u^2} du$

Ainsi, $l = \frac{1}{\beta} \int_0^\beta F^{-1}(t) dt = \frac{1}{\beta} \int_{F^{-1}(0)}^{F^{-1}(\beta)} u e^{u^2} du$

Et finalement $l = \frac{1}{\beta} \int_0^1 u e^{u^2} du$

c. $\frac{1}{\beta} \int_0^1 u e^{u^2} du = \frac{1}{\beta} \left[\frac{1}{2} e^{u^2} \right]_0^1 = \frac{e-1}{2\beta}$

Et donc $l = \frac{e-1}{2\beta}$

Exercice 3

Partie I

1.

a. $(E_\alpha) : z^2 - 2iz + \alpha = 0$

La formule du discriminant est la même que pour des coefficients réels :

$$\Delta = (-2i)^2 - 4\alpha = -4 - 4\alpha = -4(1 + \alpha)$$

Donc on a bien $\Delta = -4(1 + \alpha)$

b. (E_α) admet 2 solutions distinctes ssi $\Delta \neq 0$, donc ssi $-4(1 + \alpha) \neq 0$

Donc (E_α) admet 2 solutions distinctes ssi $\alpha \neq -1$

2. Là encore, on utilise la même formule qu'habituellement « $P(x) = x^2 - sx + p$ »

On a donc $z_1 + z_2 = 2i$ et $z_1 z_2 = \alpha$.

Partie II

1.

a. On a $\alpha = m^2 - 2m$ avec $m \in \mathbb{R}$

On trouve donc $\Delta = -4(1 + \alpha) = -4(1 + m^2 - 2m) = -4(m - 1)^2 \in \mathbb{R}_-$

On trouve donc $z_1 = \frac{2i + 2|m - 1|i}{2} = (1 + |m - 1|)i$ et $z_2 = (1 - |m - 1|)i$

Donc $z_1 = (1 + |m - 1|)i$ et $z_2 = (1 - |m - 1|)i$

b. z_1 et z_2 sont imaginaires purs.

Donc O , M_1 et M_2 sont alignés.

2. On ne peut pas avoir les 2 racines nulles, on supposera donc que $z_2 \neq 0$

a. Si $\frac{z_1}{z_2}$ est un imaginaire pur, il existe un complexe a tel que $z_1 = ia z_2$

Ainsi $z_1 \overline{z_2} = ia z_2 \overline{z_2} = ia |z_2|^2 \in i\mathbb{R}$. Ce qui signifie donc que $Re(z_1 \overline{z_2}) = 0$

Réciproquement, on suppose que $Re(z_1 \overline{z_2}) = 0$.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \overline{z_2}}{z_2 \overline{z_2}} = \frac{z_1 \overline{z_2}}{|z_2|^2} \in i\mathbb{R}$$

Donc $\frac{z_1}{z_2}$ est un imaginaire pur si et seulement si $Re(z_1 \overline{z_2}) = 0$.

$$b. |z_1 - z_2|^2 = (z_1 - z_2) \overline{(z_1 - z_2)} = (z_1 - z_2)(\overline{z_1} - \overline{z_2}) = z_1 \overline{z_1} + z_2 \overline{z_2} - z_1 \overline{z_2} - \overline{z_1} z_2$$

Or $\overline{z_1} z_2 = \overline{z_1 \overline{z_2}}$ donc $z_1 \overline{z_2} + \overline{z_1} z_2 = 2Re(z_1 \overline{z_2})$ et finalement

$$|z_1 - z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2Re(z_1 \overline{z_2})$$

De la même façon, on trouve $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2Re(z_1 \overline{z_2})$

$$\text{Et donc } |z_1 - z_2|^2 = |z_1 + z_2|^2 - 4Re(z_1 \overline{z_2})$$

c. Comme vu à la question 2.a, $\frac{z_1}{z_2}$ est un imaginaire pur est équivalent à $Re(z_1 \overline{z_2}) = 0$

Et avec la question précédente, $\frac{z_1}{z_2} \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow |z_1 - z_2|^2 = |z_1 + z_2|^2$

Or, on a vu en question 1.2 que $z_1 + z_2 = 2i$ et donc $|z_1 - z_2|^2 = |z_1 + z_2|^2 = 4$

$$\text{Et donc } \frac{z_1}{z_2} \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow |z_1 - z_2| = 2$$

3.

a. On a vu dans la 1ère question que $\Delta = -4(1 + \alpha)$

On sait par ailleurs que $z_1 + z_2 = 2i$

$$\text{Donc } (z_1 + z_2)^2 = z_1^2 + z_2^2 + 2z_1z_2 = -4$$

$$\text{Et comme } z_1z_2 = \alpha, \text{ on trouve } z_1^2 + z_2^2 = -4 - 2\alpha$$

$$\text{Par ailleurs } (z_1 - z_2)^2 = z_1^2 + z_2^2 - 2z_1z_2 = -4 - 2\alpha - 2\alpha = -4(1 + \alpha) = \Delta$$

$\text{Donc on confirme } (z_1 - z_2)^2 = \Delta$

b. OM_1M_2 rectangle en O se « traduit » par $\frac{z_1}{z_2}$ est imaginaire pur.

$$\text{Comme } (z_1 - z_2)^2 = \Delta, \text{ donc } |z_1 - z_2|^2 = |\Delta| = 4$$

$$\text{Et } |\Delta| = 4 |1 + \alpha| = 4$$

$$\text{D'où finalement } |1 + \alpha| = 1$$

$\text{Donc } \Gamma \text{ correspond au cercle de centre } (-1; 0) \text{ et de rayon } 1.$

Exercice 4

1.

a. $(i; 2) T (1; i) = (i \times -i + 1; 2i) = (2; 2i)$

$\text{Donc } (i; 2) T (1; i) = (2; 2i)$

$\text{On trouve par ailleurs } (1; i) T (i; 2) = (2 + i; 2i)$

b. La question précédente nous indique que $(1; i) T (i; 2) \neq (i; 2) T (1; i)$

$\text{Et donc la loi } T \text{ n'est pas commutative dans } \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*.$

2. Considérons a, c et e dans \mathbb{C} et b, d et f dans \mathbb{C}^* .

$$\begin{aligned} \text{On a d'une part } \left[(a; b) T (c; d) \right] T (e; f) &= (a\bar{d} + c; bd) T (e; f) = ((a\bar{d} + c)\bar{f} + e; bdf) \\ &= (a\bar{d}\bar{f} + c\bar{f} + e; bdf) \end{aligned}$$

$$\text{Et d'autre part } (a; b) T \left[(c; d) T (e; f) \right] = (a; b) T (c\bar{f} + e; df) = (a\bar{d}\bar{f} + c\bar{f} + e; bdf)$$

$$\text{Donc } \left[(a; b) T (c; d) \right] T (e; f) = (a; b) T \left[(c; d) T (e; f) \right]$$

$\text{Et donc la loi } T \text{ est associative dans } \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*.$

3. Prenons a et b dans \mathbb{C}

$$(a; b) T (0; 1) = (a \times 1 + 0; b) = (a; b)$$

$$\text{Et } (0; 1) T (a; b) = (0 \times \bar{b} + a; 1 \times b) = (a; b)$$

$$\text{Et donc } (0; 1) T (a; b) = (a; b) T (0; 1) = (a; b)$$

Donc $(0; 1)$ est l'élément neutre de T .

4.

a. Soit $(a; b) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$, $(a; b) T \left(-\frac{a}{b}; \frac{1}{b} \right) = \left(\frac{a}{b} - \frac{a}{b}; b \times \frac{1}{b} \right) = (0; 1)$

b. D'après les questions précédentes, T est une loi interne de $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$, associative et pour laquelle tous les éléments de $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$ ont un opposé. T n'est par contre pas commutative.

Donc $(\mathbb{C} \times \mathbb{C}^*, T)$ est un groupe non commutatif.

5.

a. pour un réel d , on a $\bar{d} = d \in \mathbb{R}$, et donc :

$$\forall ((a; b); (c; d)) \in (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*)^2, (a; b) T (c; d) = (a\bar{d} + c; bd) = (ad + c; bd) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$$

Ainsi $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ est stable par T .

b. L'élément neutre de T est bien dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ et l'associativité reste vraie.

L'opposé est également dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ (là encore car le conjugué d'un réel est un réel).

On peut donc conclure que $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ est un sous-groupe de $(\mathbb{C} \times \mathbb{C}^*, T)$.

Exercice 5

1.

a. Comme p et q sont premiers et que r est premier avec eux, on peut appliquer le petit théorème de Fermat.

On a donc :

$$r^{p-1} \equiv 1 [p], \text{ ce qui est équivalent à } r^{p-1} - 1 \text{ est un multiple de } p$$

$$\text{Et } r^{q-1} \equiv 1 [q], \text{ ce qui est équivalent à } r^{q-1} - 1 \text{ est un multiple de } q$$

Donc p divise $r^{p-1} - 1$ et q divise $r^{q-1} - 1$.

b. Comme $r^{p-1} \equiv 1 [p]$, on déduit que $(r^{p-1})^{q-1} = r^{(p-1)(q-1)} \equiv 1 [p]$

$$\text{De la même façon } r^{(p-1)(q-1)} \equiv 1 [q]$$

Ainsi, p et q divisent $r^{(p-1)(q-1)} - 1$.

c. D'après la question précédente, p et q divisent $r^{(p-1)(q-1)} - 1$.

Et comme p et q sont premiers (et donc premiers entre eux) leur produit divise $r^{(p-1)(q-1)} - 1$.

Donc pq divise $r^{(p-1)(q-1)} - 1$.

2. Posons $p = 13$, $q = 17$ (qui sont bien premiers) et $r = 2024$, qui est bien premier avec 13 et 17.

On a de plus $13 \times 17 = 221$ et $(13 - 1) \times (17 - 1) = 12 \times 16 = 192$

Et donc 221 qui divise $2024^{192} - 1$ ou encore $2024^{192} \equiv 1 [221]$.

Ce qui implique que si $2024^{192}x \equiv 3 [221]$ alors $x \equiv 3 [221]$

Les solutions de l'équation sont $x = 3 + 221k$, $k \in \mathbb{Z}$.