Bac 2024 - Centres Etrangers 1 - corrigé

Exercice 1

Partie A

1. La fonction f est une fraction rationnelle (quotient de 2 polynômes) dont le dénominateur ne s'annule pas sur l'intervalle considéré $[0;1]$. Elle y est donc bien dérivable.

$$\forall x \in [0;1],\ f'(x) = \frac{0{,}96\,(0{,}93x + 0{,}03) - 0{,}93 \times 0{,}96x}{(0{,}93x + 0{,}03)^2} = \frac{0{,}96 \times 0{,}03}{(0{,}93x + 0{,}03)^2}$$

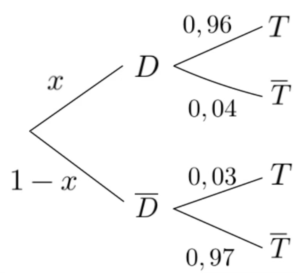
Ce qui confirme que $\forall x \in [0;1],\ f'(x) = \dfrac{0{,}0288}{(0{,}93x + 0{,}03)^2}$

2. Le numérateur étant une constante strictement positive et le dénominateur un carré qui ne s'annule pas, on en déduit que : $\forall x \in [0;1],\ f'(x) > 0$

Donc f est strictement croissante sur $[0;1]$

Partie B

1. L'arbre de probabilité complété :



2. D'après l'arbre ci-dessus, on trouve :

$P(D \cap T) = x \times 0{,}96 = 0{,}96x$

Donc la probabilité qu'un athlète dopé ait un test positif est de $0{,}96x$.

3. D'après la formule des probabilités totales, on a :

$$P(T) = P(D \cap T) + P\left(\overline{D} \cap T\right) = 0{,}96x + (1 - x) \times 0{,}03 = 0{,}96x - 0{,}03x + 0{,}03 = 0{,}93x + 0{,}03$$

Donc la probabilité de l'évènement T est de $0{,}93x + 0{,}03$.

4. D'après la formule des probabilités conditionnelles :

$$P_T(D) = \frac{P(D \cap T)}{P(T)}$$

Et d'après les questions précédentes : $P_T(D) = \dfrac{P(D \cap T)}{P(T)} = \dfrac{0{,}96x}{0{,}93x + 0{,}03} = f(x)$

L'hypothèse de 50 dopés pour 1000 testés correspond à $x = 0{,}05$

Ainsi, la probabilité qu'un sportif soit dopé sachant que son test est positif est $f\left(0{,}05\right) = 0{,}63$.

5.
a. D'après ce qu'on vient de voir, la valeur prédictive positive est égale à $f(x)$

On va chercher x tel que $f(x) = 0{,}9$ (comme f est croissante, cela donnera bien la valeur minimale cherchée).

On cherche donc la solution dans $\left[0; 1\right]$ de : $f(x) = \dfrac{0{,}96x}{0{,}93x + 0{,}03} = 0{,}9$

Ce qui implique $0{,}96x = 0{,}9\,(0{,}93x + 0{,}03)$

D'où $0{,}96x = 0{,}9\,(0{,}93x + 0{,}03)$
D'où $0{,}96x = 0{,}837x + 0{,}027$ ou encore $0{,}123x = 0{,}027$

Et finalement $x = \dfrac{0{,}027}{0{,}123} \approx 0{,}22$

La valeur prédictive positive du test est supérieur à $0{,}9$ à partir de $x \approx 0{,}22$.

b. Comme f est croissante, plus x augmente, meilleure sera la valeur prédictive positive.

Donc le ciblage des tests va améliorer la valeur prédictive positive.

Exercice 2

1.
a. On cherche à résoudre $f(x) = 2x\mathrm{e}^{-x} = x$ dans $\left[0; 1\right]$

Or $2x\mathrm{e}^{-x} = x \Rightarrow 2x\mathrm{e}^{-x} - x = 0$

D'où $x\left(2\mathrm{e}^{-x} - 1\right) = 0$

Les solutions sont $x = 0$ ou $2\mathrm{e}^{-x} - 1 = 0$
or $2\mathrm{e}^{-x} - 1 = 0 \Rightarrow \mathrm{e}^{-x} = \dfrac{1}{2}$ ou encore $x = -\ln\left(\dfrac{1}{2}\right) = \ln(2) \approx 0{,}69$

Donc sur $\left[0; 1\right]$, $f(x) = x$ possède 2 solutions $x = 0$ et $x = \ln(2)$

b. f est bien dérivable sur $\left[0; 1\right]$ (et même sur $\mathbb{R}$) comme produit de fonctions qui le sont.

Et $\forall x \in \left[0; 1\right]$, $f'(x) = 2\mathrm{e}^{-x} - 2x\mathrm{e}^{-x} = 2\mathrm{e}^{-x}(1 - x)$

$\boxed{\text{Donc } \forall x \in [0;1],\ f'(x) = 2e^{-x}(1-x)}$

c. $\forall x \in [0;1]$, $e^{-x} > 0$ et $1 - x \geqslant 0$ (et même $1 - x > 0$ sur $]0;1[$).

Donc f est croissante sur $[0;1]$.

D'où le tableau de variations :

x	0		1
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{2}{e}$

2.

a. En reprenant le tableau de variations et en notant que $\frac{2}{e} \approx 0{,}74$, on peut conclure que $\forall x \in [0;1],\ f(x) \in [0;1]$

Nous allons utiliser ce résultat pour montrer (dans un premier temps) par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n \leqslant 1$.
On a $u_0 = 0{,}1 \in [0;1]$, ce qui initialise la proposition.

Supposons maintenant la proposition vraie à un rang n et étudions le rang $n+1$:
$u_{n+1} = f(u_n) \in [0;1]$ d'après l'hypothèse de récurrence et la remarque préliminaire.
Ce qui nous assure l'hérédité de la proposition.

On conclut donc que $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n \leqslant 1$

De la même façon, on peut prouver que $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < u_n < \ln(2)$ (je te laisse le faire, on utilise le fait que $[0;\ln(2)]$ soit stable par f et qu'on a montré à la question a que les bornes étaient des points fixes de f. On a donc $\forall x \in]0;\ln(2)[,\ f(x) \in]0;\ln(2)[$).

Étudions maintenant le sens de variations de la suite :
Pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = 2u_n e^{-u_n} - u_n = u_n\left(2e^{-u_n} - 1\right)$
Comme $0 < u_n < \ln(2)$, $2e^{-u_n} - 1 > 0$.

Et donc $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n > 0$.

$\boxed{\text{On conclut donc que } \forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n < u_{n+1} \leqslant 1}$

b. (u_n) est croissante et majorée d'après la question précédente.

$\boxed{\text{D'après le théorème de la limite monotone } (u_n) \text{ est convergente.}}$

3. Comme (u_n) est une suite récurrente, elle ne peut converger que vers un point fixe de f.
Comme (u_n) est croissante sa limite ne peut pas être 0.

$\boxed{\text{Donc } (u_n) \text{ converge vers } \ln(2).}$

4.

a. On vient de voir que (u_n) est croissante et converge vers $\ln(2)$

$\boxed{\text{Donc } \forall n \in \mathbb{N},\ \ln(2) - u_n > 0.}$

b. Complétons le script proposé

```
from math import *
def seuil():
    n=0
    u=0.1
    while log(2)-u>=0.0001:
        n=n+1
        u=2*u*exp(-u)
    return (u,n)

seuil()
```

c. En exécutant le script, on trouve :

$\boxed{\text{Le nombre d'étape est } n = 11.}$

Exercice 3

1. Si y est une fonction constante, sa dérivée y' est nulle
Comme on doit avoir l'égalité $y = y'$,

$\boxed{\text{Cela permet de conclure que la seule solution constante de } (E_0) \text{ est la fonction nulle.}}$

2. On sait que la dérivée de la fonction exponentielle est elle-même.

Donc $\forall k \in \mathbb{R},\ \left(k\mathrm{e}^x\right)' = k\mathrm{e}^x$

$\boxed{\text{Ainsi, l'ensemble des solutions de } (E_0) \text{ sont les fonctions } x \mapsto k\mathrm{e}^x,\ k \in \mathbb{R}.}$

3. h est bien dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions qui le sont.

$\forall x \in \mathbb{R},\ h'(x) = -2\sin(x) + \cos(x)$

Donc $\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) - \cos(x) - 3\sin(x) = 2\cos(x) + \sin(x) - \cos(x) - 3\sin(x)$
$= -2\sin(x) + \cos(x) = h'(x)$

$\boxed{\text{Ce qui confirme bien que } h \text{ est solution de } (E).}$

4. Démontrons l'équivalence par double implication :
($\Rightarrow$) Soit f solution de (E)
on a donc $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = f(x) - \cos(x) - 3\sin(x)$

Ce qui nous donne
$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) - h'(x) = f(x) - \cos(x) - 3\sin(x) - h(x) + \cos(x) + 3\sin(x) = f(x) - h(x)$

Et donc $f - h$ est solution de (E_0)

($\Leftarrow$) Soit $f - h$ solution de (E_0)
Ainsi $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) - h'(x) = f(x) - h(x)$ ou $f'(x) = f(x) + h'(x) - h(x)$

Et par définition de h :
$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = f(x) - 2\sin(x) + \cos(x) + 2\cos(x) + \sin(x) = f(x) + 3\cos(x) - \sin(x)$
Et donc f est solution de (E).

Finalement f solution de $(E) \Leftrightarrow f - h$ solution de $\left(E_0\right)$

5. On a déterminé à la question 2 les solutions de $\left(E_0\right)$

On en déduit que les solution de (E) sont les fonctions $f : x \mapsto ke^x - h(x),\ k \in \mathbb{R}$.

Donc, les solution de (E) sont les fonctions $f : x \mapsto ke^x - 2\cos(x) - \sin(x),\ k \in \mathbb{R}$.

6. D'après la question précédente, on a $\forall k \in \mathbb{R},\ g(x) = k\mathrm{e}^x - 2\cos(x) - \sin(x),\ k \in \mathbb{R}$

D'où $g(0) = k - 2 = 0$

Donc la seule solution g de (E) telle que $g(0) = 0$ est $g : x \mapsto 2\mathrm{e}^x - 2\cos(x) - \sin(x)$.

7. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} -2\mathrm{e}^x + 2\cos(x) + \sin(x)\,\mathrm{d}x = \left[-2\mathrm{e}^x + 2\sin(x) - \cos(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -2\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}} + 2 + 2 - 1$
$= -2\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}} + 2 + 2 + 1 = -2\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}} + 5$

Donc $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} -2\mathrm{e}^x + 2\cos(x) + \sin(x)\,\mathrm{d}x = -2\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}} + 5$

Exercice 4

1. Nous allons vérifier si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires :

On a $\overrightarrow{AB}(1;3;-2)$ et $\overrightarrow{AC}(3;-1;0)$.
On voit bien (en particulier car $z_{\overrightarrow{AC}} = 0$) qu'on ne peut pas trouver de $k \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$ et que les vecteurs ne sont pas colinéaires.

Donc $A,\ B$ et C ne sont pas alignés.

2.
a. Calculons :
$\vec{n}\,.\,\overrightarrow{AB} = 1 \times 1 + 3 \times 3 - 5 \times 2 = 0$
$\vec{n}\,.\,\overrightarrow{AC} = 1 \times 3 - 3 \times 1 + 5 \times 0 = 0$

Cela nous indique que $\vec{n}$ est orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et à $\overrightarrow{AC}$.

Donc $\vec{n}$ est orthogonal à (ABC).

b. Avec le résultat précédent, on sait qu'une équation cartésienne de (ABC) est $x + 3y + 5z + k = 0$ avec $k \in \mathbb{R}$.

Or $A \in (ABC)$ donc ses coordonnées vérifient cette équation, donc $-2+5\times2+k=0$.
Ce qui nous donne bien $k=-8$.

Ce qui confirme qu'une équation cartésienne de (ABC) est $x+3y+5z-8=0$.

c. On vérifie que les coordonnées de D ne vérifient pas l'équation précédente :
$x_D+3y_D+5z_D-8=15-8=7\neq0$

Donc D n'appartient pas à (ABC), ce qui signifie bien que :

A, B, C et D ne sont pas coplanaires.

3.
a. On vérifie facilement que $D\in\mathscr{D}_1$ avec $t=0$.

De plus, on remarque que $\vec{n}$ est un vecteur directeur de $\mathscr{D}_1$ qui est donc orthogonale à (ABC)

Et donc $\mathscr{D}_1$ et la hauteur du tétraèdre $ABCD$ issue de D

On trouve de la même façon que précédemment que $C\in\mathscr{D}_2$ en prenant $s=0$.
Il faut donc montrer que $\mathscr{D}_2$ est orthogonale à (ABD) :

On a $\overrightarrow{AB}(1;3;-2)$ et $\overrightarrow{AD}(2;0;1)$.
De plus, on sait que $\vec{m}\left(3;-5;-6\right)$ est un vecteur directeur de $\mathscr{D}_2$.

On calcule donc :
$\vec{m}\,.\,\overrightarrow{AB}=1\times3-5\times3+6\times2=0$
$\vec{m}\,.\,\overrightarrow{AD}=3\times2-5\times0-6\times1=0$

Donc $\vec{m}$ est orthogonal à (ABD), ce qui implique que $\mathscr{D}_2$ l'est également.

Et donc $\mathscr{D}_2$ et la hauteur du tétraèdre $ABCD$ issue de C.

b. On va réponse aux 2 parties de la question en même temps. Nommons $M\left(x_M;y_M;z_M\right)$ le point d'intersection (éventuel !) des 2 droites.

Ses coordonnées doivent donc vérifier les représentations paramétriques de chacune des droites.

$$\begin{cases} x_M=t \\ y_M=3t \\ z_M=3+5t \end{cases} \quad \text{avec } t\in\mathbb{R}$$

$$\begin{cases} x_M=1+3s \\ y_M=-1-5s \\ z_M=2-6s \end{cases} \quad \text{avec } s\in\mathbb{R}$$

Les équations sur x_M, nous indique $t=1+3s$
En intégrant ceci dans y_M, on trouve : $3(1+3s)=-1-5s$
Qui donne $3+9s=-1-5s$
Et donc $s=-\dfrac{2}{7}$

Cela donne donc avec la représentation de $\mathscr{D}_2$:

$$\begin{cases} x_M = 1 - 3 \times \frac{2}{7} = \frac{1}{7} \\ y_M = -1 + 5 \times \frac{2}{7} = \frac{3}{7} \\ z_M = 2 + 6 \times \frac{2}{7} = \frac{26}{7} \end{cases}$$

Cela donne $t = 1 + 3s = \dfrac{1}{7}$ et on retrouve bien les mêmes coordonnées dans la représentation paramétrique de $\mathscr{D}_1$.

Donc $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ sont sécantes et se coupent en $\left(\dfrac{1}{7}; \dfrac{3}{7}; \dfrac{26}{7}\right)$

4.

a. On utilise le même principe qu'à la question précédente, les coordonnées de H doivent vérifier l'équation cartésienne identifiée pour (ABC) et la représentation de $\mathscr{D}_1$, ce qui donne le système :

$$\begin{cases} x_H = t \\ y_H = 3t \\ z_H = 3 + 5t \\ x_H + 3y_H + 5z_H - 8 = 0 \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}$$

En intégrant les 3 premières lignes dans la dernière, on trouve :
$t + 3 \times 3t + 5\left(3 + 5t\right) - 8 = t + 9t + 25t + 15 - 8 = 0$

D'où $t = -\dfrac{7}{35} = -\dfrac{1}{5}$ et $\begin{cases} x_H = -\frac{1}{5} \\ y_H = -\frac{3}{5} \\ z_H = 2 \end{cases}$

Les coordonnées de H projeté orthogonal de D sur (ABC) sont $H\left(-\dfrac{1}{5}; -\dfrac{3}{5}; 2\right)$

b. La distance de D à (ABC) est égale à la longueur DH.

$$DH^2 = \left(\frac{1}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^2 + (3-2)^2 = \frac{1}{25} + \frac{9}{25} + 1 = \frac{35}{25} = \frac{7}{5}$$

Et finalement, la distance de D à (ABC) est $DH = \sqrt{\dfrac{7}{5}} \approx 1{,}18.$