# Bac 2024 - Asie 1 - corrigé

## Exercice 1

### Partie A

1. En analysant la représentation graphique, on peut lire :

| $x$ | $0$ | | $\frac{3}{2}$ | | $5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | $\nearrow$ | $2,4$ | $\searrow$ | |

2. On voit sur la courbe que la tangente $T$ traverse la courbe $\mathscr{C}$ en $A$

$\boxed{\text{Donc la courbe } \mathscr{C} \text{ présente un point d'inflexion en } A.}$

3. D'après le tableau de variations de $f$, $f'$ doit être négative sur $\left[0;\frac{3}{2}\right]$, puis positive sur $\left[\frac{3}{2};5\right]$.

$\boxed{\text{La courbe de } f' \text{ est donc } \mathscr{C}_2}$

On peut évidemment déduire pour $f''$, mais vérifions : un point d'inflexion correspond à la dérivée seconde qui s'annule en changeant de signe. La courbe représentative de $f''$ doit présenter cette propriété en $x=\frac{5}{2}$.

$\boxed{\text{Cela nous permet de confirmer que la courbe de } f'' \text{ est } \mathscr{C}_1}$

4. Une primitive de $f$ doit être décroissante sur $\left[0;\frac{1}{2}\right]$ ($f$ y étant négative) puis croissante, ce qui n'est pas le cas de $\mathscr{C}_3$.

### Partie B

1.
a. $f$ est bien définie et dérivable sur $\left[0;+\infty\right[$ (et même sur $\mathbb{R}$)

Et $\forall x \in \left[0;+\infty\right[,\ f'(x) = 4\mathrm{e}^{-x+1} - (4x-2)\,\mathrm{e}^{-x+1} = \left(-4x+6\right)\mathrm{e}^{-x+1}$

$\boxed{\text{Ainsi, } \forall x \in \left[0;+\infty\right[,\ f'(x) = \left(-4x+6\right)\mathrm{e}^{-x+1}}$

b. On a $\forall x \in \left[0;+\infty\right[,\ \mathrm{e}^{-x+1} > 0$

$f'(x)$ est donc du signe de $-4x+6$, ce qui confirme que la décroissance de $f$ au-delà de $5$ et jusqu'en $+\infty$

De plus $f(0) = -2\mathrm{e}$

Et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ par croissance comparée de l'exponentielle « face » à une fonction polynomiale.

On obtient :

| $x$ | $0$ | | $\frac{3}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $-2\mathrm{e}$ | $\nearrow$ | $2{,}4$ | $\searrow$ | $0$ |

<u>Attention :</u> $f\left(\dfrac{3}{2}\right) = 4\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}} \approx 2{,}43$. La valeur indiquée dans le tableau est approchée.

c. Pour étudier les points d'inflexion éventuels, nous allons étudier la dérivée seconde.

$f'$ est bien dérivable sur $\left[0;+\infty\right[$, comme produit d'une exponentielle et d'une fonction polynomiale.

Et $\forall x \in \left[0;+\infty\right[,\ f''(x) = -4\mathrm{e}^{-x+1} - \left(6-4x\right)\mathrm{e}^{-x+1} = (4x-10)\,\mathrm{e}^{-x+1}$

Comme pour $f'$, $f''(x)$ est du signe de $4x-10$.

Cela confirme donc que $f''(x)$ s'annule en changeant de signe en $x = \dfrac{5}{2}$

$\boxed{\text{Cela confirme que } \mathscr{C} \text{ présente un point d'inflexion au point d'abscisse } x = \dfrac{5}{2}.}$

2.

a. Pour que $F$ soit une primitive de $f$, il faut qu'elle vérifie : $F' = f$.

On a $\forall x \in \left[0;+\infty\right[,\ F'(x) = a\mathrm{e}^{-x+1} - \left(ax+b\right)\mathrm{e}^{-x+1} = \left(-ax+a-b\right)\mathrm{e}^{-x+1}$

On cherche donc à identifier $\forall x \in \left[0;+\infty\right[,\ \left(-ax+a-b\right)\mathrm{e}^{-x+1} = (4x-2)\,e^{-x+1}$

On doit donc résoudre le système $\begin{cases} -a = 4 \\ a-b = -2 \end{cases}$, qui donne $\begin{cases} a = -4 \\ b = -2 \end{cases}$

$\boxed{\text{Ainsi, } F : x \mapsto (-4x-2)\,\mathrm{e}^{-x+1} \text{ est une primitive de } f.}$

b. D'après la question précédente,

$I = \displaystyle\int_{\frac{3}{2}}^{8} f(x)\,\mathrm{d}x = F(8) - F\left(\frac{3}{2}\right) = (-4\times 8 - 2)\,\mathrm{e}^{-8+1} - \left(-4\times\frac{3}{2} - 2\right)\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}+1}$

$= -34\mathrm{e}^{-7} + 8\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}} \approx 4{,}82$

Donc on trouve $I = \int_{\frac{3}{2}}^{8} f(x)\,\mathrm{d}x \approx 4{,}82$

3.

a. Comme vu à la question 1.b, on a $f\left(\frac{3}{2}\right) = 4\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}} \approx 2{,}43$

La hauteur du point $D$ est donc de $2\mathrm{m}$ et $43\mathrm{cm}$

b. D'après la question 2.b, la surface à peindre est de $4{,}82\mathrm{m}^2$ et on va en couvrir $75\,\%$ , donc $3{,}6\mathrm{m}^2$ environ.

Le nombre de bombes à utiliser est donné par $\frac{3{,}6}{0{,}8} \approx 4{,}5$

Il faut donc utiliser $5$ bombes de peinture pour couvrir le mur de la rampe.

# Exercice 2

1. Montrons que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ ne sont pas colinéaires.

On a $\overrightarrow{AB}(1;0;-1)$ et $\overrightarrow{BC}(-4;4;2)$. On peut conclure immédiatement (en particulier à cause de la coordonnée nulle) qu'ils ne sont pas colinéaires.

Donc $A,\ B$ et $C$ ne sont pas alignés.

2.

a. Pour montrer que $A,\ B,\ C$ et $D$ sont coplanaires, nous allons tâcher d'écrire $\overrightarrow{AD}$ comme une combinaison linéaire de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$.

Or $\overrightarrow{AD}(1;4;-3)$ et on veut trouver $a$ et $b$ dans $\mathbb{R}$ tels que $\overrightarrow{AD} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{BC}$

On doit donc résoudre $\begin{cases} 1 = a - 4b \\ 4 = 4b \\ -3 = -a + 2b \end{cases}$

Avec la ligne 2, on trouve immédiatement $b = 1$.
Puis $a = 5$ à partir de la 1ère ligne.
Et confirme finalement que la 3ème égalité est bien vérifiée !

On a donc $\overrightarrow{AD} = 5\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$

Et donc $A,\ B,\ C$ et $D$ sont bien coplanaires

b. Pour que $ABDC$ soit un trapèze de bases $[AB]$ et $[CD]$, il faut que $(AB)$ et $(CD)$ soient parallèles ou encore que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ soient colinéaires car on sait déjà que les points ne sont pas alignés.

On a déjà vu que $\overrightarrow{AB}(1;0;-1)$ et on a $\overrightarrow{CD}(4;0;-4)$.
Donc on a bien $\overrightarrow{CD} = 4\overrightarrow{AB}$

On conclut donc que $ABDC$ est un trapèze de bases $[AB]$ et $[CD]$

3.

a. Vérifions que $\vec{n}$ est orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$.

$\vec{n} \,.\, \overrightarrow{AB} = 2 \times 1 + 1 \times 0 + 2 \times (-1) = 0$
$\vec{n} \,.\, \overrightarrow{BC} = 2 \times (-4) + 1 \times 4 + 2 \times (-2) = 0$

Donc $\vec{n}$ est orthogonal au plan $(ABC)$

b. On déduit de la question précédente qu'une équation du plan est :
$2x + y + 2z + d = 0$, avec $d \in \mathbb{R}$

De plus $B \in (ABC)$ donc ses coordonnées vérifient l'équation du plan :
$2 \times 4 - 1 + d = 0$
Donc $d = -7$

Et une équation de $(ABC)$ est $2x + y + 2z - 7 = 0$

c. Un vecteur directeur de $\Delta$ est $\vec{n}$ et la droite passe par $S$.

Une représentation paramétrique de $\Delta$ est donc $\begin{cases} x = 2t + 2 \\ y = t + 1 \\ z = 2t + 4 \end{cases}$

d. Si $I$ est le point d'intersection de $\Delta$ et $(ABC)$, il vérifie les 2 équations de la droite et du plan.
Déterminons d'abord $t$ en injectant les représentations paramétriques des coordonnées provenant dans l'équation de $(ABC)$ :
$2(2t + 2) + t + 1 + 2(2t + 4) - 7 = 0$
$4t + 4 + t + 1 + 4t + 8 - 7 = 0$
$9t + 6 = 0$

Et donc $t = -\dfrac{2}{3}$

Ce qui donne $\begin{cases} x = 2 \times \left(-\frac{2}{3}\right) + 2 = \frac{2}{3} \\ y = -\frac{2}{3} + 1 = \frac{1}{3} \\ z = 2 \times \left(-\frac{2}{3}\right) + 4 = \frac{8}{3} \end{cases}$

On trouve bien $I\left(\dfrac{2}{3}; \dfrac{1}{3}; \dfrac{8}{3}\right)$

Calculons maintenant la longueur $SI$ :

$$SI^2 = \left(2 - \frac{2}{3}\right)^2 + \left(1 - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(4 - \frac{8}{3}\right)^2 = \left(\frac{4}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{36}{9} = 4$$

Finalement, on trouve $SI = 2\text{cm}$

4.

a. Nous allons vérifier que le point $H$ proposé correspond bien au projeté de $B$ sur $(CD)$.
On a $\overrightarrow{BH}(-1;4;-1)$, donc $\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{CD} = -1 \times 4 + 4 \times 0 + (-4) \times (-1) = 0$.
Les 2 vecteurs sont bien orthogonaux.

De plus $\overrightarrow{CH}(3;0;-3)$ et donc $\overrightarrow{CH} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{CD}$. Ainsi on a bien $H \in (CD)$.

Donc $H(3;3;-1)$ est le projeté orthogonal de $B$ sur $(CD)$

Calculons $BH^2 = (-1)^2 + 4^2 + (-1)^2 = 18$

Donc $BH = 3\sqrt{2}$.

b. D'après la question précédente, $BH = h = 3\sqrt{2}$

On a également $B = CD = \sqrt{4^2 + (-4)^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$
Et $b = AB = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$

Finalement $\mathscr{A} = \dfrac{B+b}{2} \times h = \dfrac{5}{2}\sqrt{2} \times 3\sqrt{2} = 15$

Donc l'aire du trapèze est $\mathscr{A} = 15\text{cm}^2$.

5. Avec la formule rappelée, on calcule le volume : $\mathscr{V} = \dfrac{1}{3} \times \mathscr{A} \times SI = \dfrac{1}{3} \times 15 \times 2 = 10$

Et donc le volume de la pyramide est $\mathscr{V} = 10\text{cm}^3$.

# Exercice 3

## Partie A

1. La probabilité de $I$ est donnée dans l'introduction à $5{,}7\,\%$

Donc $p(I) = 0{,}057$

2.

a. L'épreuve suit une loi de Bernoulli avec une probabilité $p = 0{,}057$ et une répétition $n = 100$

Donc la loi $X$ est une loi binomiale $\mathscr{B}\left(100; 0{,}057\right)$

b. On connaît la formule pour une loi binomiale :

$E(X) = np = 100 \times 0{,}057 = 5{,}7$

Donc $E(X) = 5{,}7$ : en répétant l'expérience la moyenne des résultats s'approchera de $5{,}7$ personnes infectées.

c. La probabilité de $X = 0$ correspond à la probabilité que les 100 personnes ne soient pas infectées.
La probabilité qu'une personne ne soit pas infectée est de $1 - 0{,}057 = 0{,}943$.

$p\ (X = 0) = 0{,}943^{100} \approx 0{,}0028$

Donc $p\ (X = 0) \approx 0{,}0028$ : la probabilité qu'aucune personne ne soit infectée est de $0{,}28\ \%$.

d. « Au moins 2 personnes infectées » est l'évènement contraire de « 0 personne ou 1 personne infectée ».

On a déjà $p\ (X = 0) \approx 0{,}028$, il faut donc calculer $p\ (X = 1)$ :
$p\ (X = 1) = 100 \times 0{,}057 \times 0{,}943^{99} \approx 0{,}017$

On a donc $p\ (X \geqslant 2) = 1 - \big(p\ (X = 0) + p\ (X = 1)\big) = 1 - 0{,}0028 - 0{,}017 \approx 0{,}9802$

La probabilité d'avoir au moins 2 personnes infectées est de $98\ \%$.

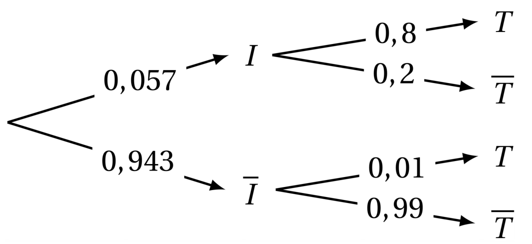
e. On cherche le résultat à la calculatrice, je n'insiste donc pas.

Le plus petit nombre tel que $p\ (X \leqslant n) > 0{,}9$ est $n = 9$

Cela signifie que pour un échantillon donné de 100 personnes, il y a $90\ \%$ de chances d'avoir 9 personnes infectées ou moins.

## Partie B

1. En reprenant les éléments donnés dans l'énoncé, on peut traduire cela avec l'arbre :




2. D'après la loi des probabilités totales : $p\ (T) = p\ (I \cap T) + p\ \left(\bar{I} \cap T\right)$

Et donc $p\ (T) = 0{,}057 \times 0{,}8 + 0{,}943 \times 0{,}01 = 0{,}05503$

Ce qui confirme bien que $p\ (T) = 0{,}05503$

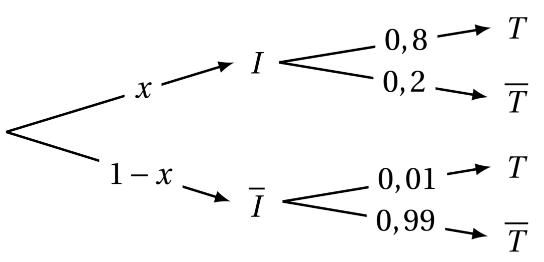
3. D'après la loi des probabilités conditionnelles, on a :

$$P_T\,(I) = \frac{P\ (I \cap T)}{P\ (T)} = \frac{0{,}057 \times 0{,}8}{0{,}05503} = \frac{0{,}0456}{0{,}05503} \approx 0{,}8286$$

Et donc $P_T\,(I) \approx 0{,}8286$

## Partie C

Notons $x$ la probabilité qu'une personne soit infectée dans la population considérée. On obtient le nouvel arbre :



On a de la même façon que précédemment $p(T) = p(I \cap T) + p\left(\bar{I} \cap T\right)$
Ce qui donne cette fois $p(T) = 0{,}8x + 0{,}01(1-x) = 0{,}8x - 0{,}01x + 0{,}01 = 0{,}79x + 0{,}01$
Et l'énoncé nous indique que $p(T) = 0{,}2944$

On doit donc résoudre $0{,}79x + 0{,}01 = 0{,}2944$
D'où $0{,}79x = 0{,}2844$

Et $x = \dfrac{0{,}2844}{0{,}79} = 0{,}36$

Dans cette population il y a $36\,\%$ de personnes infectées !

# Exercice 4

1. Considérons la suite $(u_n)$ définie par $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 1 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

La suite $(u_n)$ est minorée par $0$ et tend vers $1$ (elle est d'ailleurs minorée par $1$ également).

L'affirmation est FAUSSE.

2. On peut écrire $\dfrac{-9^n + 3^n}{7^n} = -\left(\dfrac{9}{7}\right)^n \left(1 - \left(\dfrac{1}{3}\right)^n\right)$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 - \left(\dfrac{1}{3}\right)^n = 1$
Et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{9}{7}\right)^n = +\infty$

Finalement $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{-9^n + 3^n}{7^n} = -\infty$

Comme $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant \dfrac{-9^n + 3^n}{7^n}$, on a bien $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

L'affirmation est VRAIE

3. Attention, $\mathrm{range}(N)$ comprend tous les entiers entre $0$ et $N-1$.
Je te laisse faire les calculs pour vérifier, mais :

L'affirmation est VRAIE

4. Prix A : $P_A = 15 \times 1000 = 15000$

Le prix B correspond à la somme de la suite de terme générique $2^n$ :
$$P_B = \frac{1 - 2^{15}}{1 - 2} = 2^{15} - 1 = 32767$$

L'affirmation est FAUSSE.

5. On sait que $\forall x > 1,\ \ln(x) > 0$

Donc pour $n \in \mathbb{N}$, par linéarité de l'intégrale, on a :

$$\int_1^{n+1} \ln(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^{n} \ln(x)\,\mathrm{d}x + \int_n^{n+1} \ln(x)\,\mathrm{d}x > \int_1^{n} \ln(x)\,\mathrm{d}x$$

Donc l'affirmation est VRAIE.