Bac S 2018 - Métropole

Exercice 1

1. On considère les points $M\left(x;\frac{1}{2}\left(e^x+e^{-x}-2\right)\right)$ et $M'\left(-x;\frac{1}{2}\left(e^{-x}+e^x-2\right)\right)$

On vérifie rapidement que la fonction représentée est bien paire comme la courbe le laisse supposer et donc $y_M = y_{M'}$.

Pour un x fixé, la hauteur considérée est donc $\frac{1}{2}\left(e^x+e^{-x}-2\right)$
La largeur est, elle, de $2x$

On cherche donc à résoudre l'équation : $\frac{1}{2}\left(e^x+e^{-x}-2\right)=2x$

Ce qui est équivalent à : $e^x+e^{-x}-2=4x$

Donc le problème se ramène à la recherche des solutions strictement positives de $(E) : e^x+e^{-x}-4x-2=0$

<u>Remarque :</u> le strictement est donné par l'énoncé, 0 pourrait bien être une solution du problème sans cette « contrainte ».

2.
a. Par définition, $\forall x \in \left[0;+\infty\right[,\ f(x)=e^x+e^{-x}-4x-2$
Il n'y a donc qu'à mettre $x \neq 0$ en facteur pour obtenir :

$$\forall x > 0,\ f(x)=x\left(\frac{e^x}{x}-4\right)+e^{-x}-2$$

b. Etudions le comportement en $+\infty$:
$\frac{e^x}{x}-4 \to +\infty$ (par croissance comparée)
$x\left(\frac{e^x}{x}-4\right) \to +\infty$
$e^{-x} \to 0$ et donc $e^{-x}-2 \to -2$

Finalement, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

3.
a. f est bien dérivable sur $\left]0;+\infty\right[$ comme somme de fonctions qui le sont.

<u>Remarque :</u> évidemment, on repart de la définition de f et pas de la forme factorisée introduite à la question précédente !

Et $\forall x \in \left]0;+\infty\right[,\ f'(x)=e^x-e^{-x}-4$

b. Comme e^{-x} ne peut être nul, on peut factoriser :
$$\forall x \in \left]0;+\infty\right[,\ f'(x)=e^{-x}\left(\frac{e^x}{e^{-x}}-1-\frac{4}{e^{-x}}\right)=e^{-x}\left(\left(e^x\right)^2-4e^x-1\right)$$

Et pour la même raison, on obtient bien :

$f'(x) = 0$ est équivalent à $\left(e^x\right)^2 - 4e^x - 1 = 0$

c. Comme indiqué dans l'énoncé, posons $X = e^x$

L'équation trouvée précédemment devient : $X^2 - 4X - 1 = 0$
$\Delta = (-4)^2 - 4 \times (-1) = 16 + 4 = 20$

D'où les solutions :
$$X_1 = \frac{4+\sqrt{20}}{2} = \frac{4+2\sqrt{5}}{2} = 2+\sqrt{5}$$
Et $X_2 = 2 - \sqrt{5}$ (le calcul est le même)

Le changement de variable impose que $X > 0$ et $X_2 = 2 - \sqrt{5} < 0$.

La seule solution possible est donc $X_1 = 2 + \sqrt{5}$

Donc la seule solution de $f'(x) = 0$ est $\ln\left(2+\sqrt{5}\right)$

4. Compte-tenu du tableau de signe donné, on déduit le tableau de variations :
a.

x	0		$\ln\left(2+\sqrt{5}\right)$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

Indiquons en complément :
$$f\left(\ln\left(2+\sqrt{5}\right)\right) = e^{\ln\left(2+\sqrt{5}\right)} + e^{-\ln\left(2+\sqrt{5}\right)} - 4\ln\left(2+\sqrt{5}\right) - 2$$
$$= 2+\sqrt{5} + \frac{1}{2+\sqrt{5}} - 4\ln\left(2+\sqrt{5}\right) - 2 = \sqrt{5} - \left(2-\sqrt{5}\right) - 4\ln\left(2+\sqrt{5}\right)$$
$$= 2\sqrt{5} - 2 - 4\ln\left(2+\sqrt{5}\right)$$

b. D'après le tableau de variations :

$$\forall x \in \left]0; \ln\left(2+\sqrt{5}\right)\right],\ f(x) < 0$$

Sur $\left]\ln\left(2+\sqrt{5}\right); +\infty\right[$, f est strictement croissante.

De plus, $f\left(\ln\left(2+\sqrt{5}\right)\right) < 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

On peut donc appliquer le théorème des valeurs intermédiaires qui nous assure que $f(x) = 0$ admet une unique solution strictement positive.

5.

a. L'algorithme procède par dichotomie pour évaluer une valeur approchée de la solution α de $f(x) = 0$.
(Cela fonctionne évidemment car α se situe entre 2 et 3).

m	a	b	$b-a$
	2	3	1
2,5	2	2,5	0,5
2,25	2,25	2,5	0,25
2,375	2,375	2,5	0,125
2,438	2,438	2,5	0,062

L'algorithme s'arrête quand $b - a < 1$.

b. Les valeurs en fin d'algorithme donne une valeur approchée de α par défaut (a) et par excès (b) à $b - a$ près.

(Une valeur approchée à $0{,}01$ près est $\alpha \approx 2{,}466$)

6. On cherche la solution de l'équation : $(E') : e^{\frac{t}{39}} + e^{-\frac{t}{39}} - 4\frac{t}{39} - 2 = 0$

En posant $X = \dfrac{t}{39}$, cela revient à l'équation étudiée précédemment $e^X + e^{-X} - 4X - 2 = 0$
pour laquelle on connait un encadrement $2{,}438 < \alpha < 2{,}5$

Donc la solution de notre équation est $t = 39\alpha : 95 < t < 97{,}5$

Attention ! Il ne faut pas oublier la dernière étape, la largeur (et donc la hauteur) vaut le double de cette valeur.

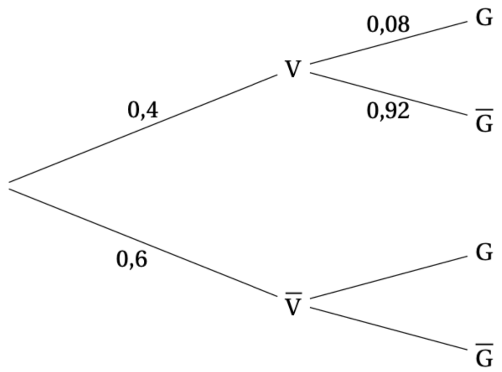
$\boxed{\text{Finalement la hauteur de l'arche vaut : } 190 < h < 195}$

Exercice 2
Partie A
1.

a. La probabilité de l'événement G est donnée dans l'énoncé.

$\boxed{\text{Ainsi } P(G) = 0{,}2 = 20\,\%}$

b.



2. La probabilité qu'une personne ayant la grippe soit vaccinée est donnée par :

$P(V \cap G) = P(V) \times P(G) = 0{,}4 \times 0{,}08 = 0{,}032$

La probabilité qu'une personne ayant la grippe soit vaccinée est $3{,}2\ \%$

3. On sait que $P(G) = P(V \cap G) + P\left(\overline{V} \cap G\right)$

Or $P(V \cap G) + P\left(\overline{V} \cap G\right) = P(V) \times P_V(G) + P\left(\overline{V}\right) \times P_{\overline{V}}(G) = 0{,}032 + 0{,}6P_{\overline{V}}(G)$

Et comme vu à la 1ère question $P(G) = 0{,}2$

Finalement $0{,}6P_{\overline{V}}(G) = 0{,}2 - 0{,}032 = 0{,}168$

D'où $P_{\overline{V}}(G) = \dfrac{0{,}168}{0{,}6} = 0{,}28$

Donc la probabilité qu'une personne non vaccinée ait contracté la grippe est de $28\ \%$

Partie B

1. Chaque expérience est indépendante avec la même probabilité de succès $p = 0{,}4$

X suit donc une loi de Bernoulli de paramètre $p = 0{,}4$

<u>Remarque :</u> c'est une loi binomiale quand on fixe un nombre de répétitions n

2.

a. On prend le nombre de tirages $n = 40$ tirages.

On peut utiliser la formule de la loi binomiale $\mathscr{B}(40{,}0{,}4)$:

$p\left(X = 15\right) = \dbinom{40}{15} \times 0{,}4^{15} \times (1 - 0{,}4)^{40-15}$

On a donc $p\left(X = 15\right) \approx 0{,}123$

b. On veut $X \geqslant 20$

Cela donne $p(X \geqslant 20) \approx 0{,}13$

3. $1450 \leqslant X \leqslant 1550$ correspond à $-\dfrac{5}{3} \leqslant Z \leqslant \dfrac{5}{3}$

La probabilité est donnée par la calculatrice $P\left(1450 \leqslant X \leqslant 1550\right) \approx 0{,}904$

Exercice 2
Partie A
1.
a. Par construction, on a :
$(EA) \perp (ABC)$

$\boxed{\text{Donc } (EA) \text{ est la hauteur issue de } E}$

Et $(BC) \perp (ABE)$

$\boxed{\text{Donc } (BC) \text{ est la hauteur issue de } C}$

b. (EA) et (BC) sont non coplanaires, donc ne peuvent pas être concourantes.

$\boxed{\text{Les 4 hauteurs de } EABC \text{ ne sont pas concourantes.}}$

2.
a. Comme l'équation est proposée, il suffit de vérifier que les 3 points vérifient l'équation.

$A\,(0; 0; 0)$ donc $x_A - y_A + z_A = 0$
$C\,(1; 1; 0)$ donc $x_C - y_C + z_C = 1 - 1 + 0 = 0$
$H\,(0; 1; 1)$ donc $x_H - y_H + z_H = 0 - 1 + 1 = 0$

$\boxed{\text{Donc l'équation cartésienne de } (ACH) \text{ est } x - y + z = 0}$

b. On a $\overrightarrow{FD}(-1; 1; -1)$
De plus, d'après son équation, $\overrightarrow{u}\,(1; -1; 1)$ est un vecteur orthogonal à (ACH).

Comme $\overrightarrow{u} = -\overrightarrow{FD}$, les 2 vecteurs sont colinéaires.

$\boxed{\text{Donc } (FD) \text{ est la hauteur de } ACHF \text{ issue de } F}$

c. De façon analogue, on va trouver que :

$\boxed{(AG) \text{ est la hauteur issue de } A, (HB) \text{ celle issue de } H \text{ et } (CE) \text{ celle issue de } C.}$

Les hauteurs sont donc les diagonales du cubes.

$\boxed{\text{Les hauteurs du tétraèdres sont donc concourantes.}}$

Partie B
1.
a. Par construction, (MK) est orthogonales à (NPQ) et donc à toutes les droites de ce plan.

$\boxed{\text{Donc } (MK) \text{ est orthogonale à } (PQ).}$

b. (PQ) est orthogonale à (MK) et (NK) qui sont 2 droites séquentes de (NMK)

$\boxed{\text{Donc } (PQ) \text{ est orthogonale à } (NMK)}$

2. D'après la question précédente, (PQ) est orthogonale à (MN)

$\boxed{\text{Donc les arêtes } [PQ] \text{ et } [MN] \text{ sont orthogonales}}$

Partie C

Nous allons vérifier si les arêtes sont orthogonales 2 à 2 en utilisant le produit scalaire des vecteurs portés par ces arêtes.

Les sommets sont : $R\left(-3;5;2\right),\ S\,(1;4;-2),\ T\left(4;-1;5\right),\ U\,(4;7;3)$

Donc $\overrightarrow{RS}\,(4;-1;-4)$ et $\overrightarrow{TU}\,(0;8;-2)$

<u>Rappel :</u> les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ *sont données par* $\left(x_B-x_A;y_B-y_A;z_B-z_A\right)$

Finalement $\overrightarrow{RS}\,.\,\overrightarrow{TU}=4\times0+(-1)\times8+(-4)\times(-2)=0$
Et $\left[RS\right]$ et $[TU]$ sont orthogonales.

<u>Rappel :</u> le produit scalaire de $\overrightarrow{u}\left(x;y;z\right)$ *et* $\overrightarrow{v}\left(x';y';z'\right)$ *est* $\overrightarrow{u}\,.\,\overrightarrow{v}=xx'+yy'+zz'$. $\overrightarrow{u}$ *et* $\overrightarrow{v}$ *sont orthogonaux si et seulement si* $\overrightarrow{u}\,.\,\overrightarrow{v}=0$.

On a ensuite $\overrightarrow{ST}\left(3;-5;7\right)$ et $\overrightarrow{RU}\,(7;2;1)$
Donc $\overrightarrow{ST}\,.\,\overrightarrow{RU}=3\times7+\left(-5\right)\times2+7\times1=18\neq0$

Ainsi 2 arêtes opposées ne sont pas orthogonales et le tétraèdres n'est pas orthocentrique.

Exercice 4 - hors spécialité

1.

a. Notons pour cette question $z = \dfrac{3 - \mathrm{i}\sqrt{3}}{4}$

$$|z|^2 = \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2 = \frac{9+3}{16} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$$

Et donc $|z| = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

On peut alors écrire $z = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}\mathrm{i}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$

$$\boxed{\text{Et donc } \frac{3 - \mathrm{i}\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}}$$

b. $z_0 = 8$

En utilisant le résultat de la question précédente, on trouve :

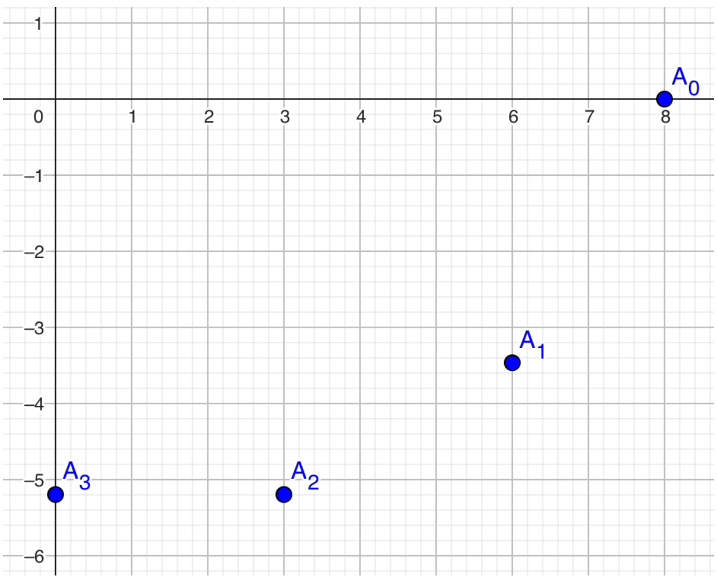
$$z_1 = 8 \times \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} = 4\sqrt{3}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$$

$$z_2 = 4\sqrt{3}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} \times \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} = 6\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$$

$$z_3 = 6\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} = 3\sqrt{3}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$$

$$\boxed{\text{Comme } \arg(z_3) = -\frac{\pi}{2},\ z_3 \text{ est imaginaire pur. De plus } \mathrm{Im}(z_3) = -3\sqrt{3}}$$

c.



2.

a. Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ z_n = 8 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{n\pi}{6}}$

$z_0 = 8 = 8 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^0 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{0\pi}{6}}$

Ce qui initialise la proposition.

Supposons donc que jusqu'au rang n $z_n = 8 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{n\pi}{6}}$ et étudions le rang $n+1$:

$$z_{n+1} = z_n \times \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} = 8 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{n\pi}{6}} \times \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} = 8 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{(n+1)\pi}{6}}$$

Ce qui confirme l'hérédité de la proposition.

On conclut donc que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ z_n = 8 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{n\pi}{6}}}$

b. D'après la définition, on peut écrire :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \left|z_n\right| = \left|8 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{n\pi}{6}}\right| = 8 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$$

Donc (u_n) est une suite géométrique de raison $\frac{\sqrt{3}}{2}$

3.

a. Notons déjà qu'avec l'expression de la question précédente, on s'assure que pour tout n de $\mathbb{N}$, $z_n \neq 0$

Soit k dans $\mathbb{N}$:

$$\frac{z_{k+1} - z_k}{z_{k+1}} = \frac{8 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{k+1} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{(k+1)\pi}{6}} - 8 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^k \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{k\pi}{6}}}{8 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{k+1} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{(k+1)\pi}{6}}} = \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^k \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{k\pi}{6}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} - 1\right)}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{k+1} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{(k+1)\pi}{6}}}$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} - 1}{\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}} = 1 - \frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} = 1 - \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = 1 - \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}\right) = 1 - 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{i}$$

Et donc $\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ \frac{z_{k+1} - z_k}{z_{k+1}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{i}}$

On sait que $A_{k+1}A_k = \left|z_{k+1} - z_k\right|$ et $OA_{k+1} = \left|z_{k+1}\right|$

En utilisant le résultat précédent, on peut écrire : $z_{k+1} - z_k = -\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{i} \times z_{k+1}$

D'où $\left|z_{k+1} - z_k\right| = \left|-\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{i}\right| \times \left|z_{k+1}\right| = \frac{1}{\sqrt{3}}\left|z_{k+1}\right|$

$$\boxed{\text{On conclut donc } \forall k \in \mathbb{N},\ A_{k+1}A_k = \frac{1}{\sqrt{3}}OA_{k+1}}$$

b. En utilisant les résultats précédents, on obtient :

$$A_kA_{k+1} = \frac{1}{\sqrt{3}}OA_{k+1} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left|z_{k+1}\right| = \frac{1}{\sqrt{3}} \times 8 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{k+1} = \frac{8}{\sqrt{3}} \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{k+1}$$

Ainsi $l_n = \sum_{k=0}^{n-1} A_kA_{k+1} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{8}{\sqrt{3}} \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{k+1} = \frac{8}{\sqrt{3}} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{k+1} = \frac{8}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}$

$$= 4 \times \frac{2-2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n}{2-\sqrt{3}} == \frac{8}{2-\sqrt{3}}\left(1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n\right)$$

Comme $\frac{\sqrt{3}}{2} < 1,\ \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n = 0$

$$\boxed{\text{On confirme que } (l_n) \text{ converge et } \lim_{n\to+\infty} l_n = \frac{8}{2-\sqrt{3}}}$$

Exercice 4 - spécialité

Partie A

1. On cherche des solutions entières à (E) : $x^2 - 8y^2 = 1$

Avec $x = 3$ et $y = 1$ on trouve : $9 - 8 = 1$

$$\boxed{\text{Donc } x = 3 \text{ et } y = 1 \text{ est une solution de } (E)}$$

2.

a. Le couple $x_0 = 1$ et $y_1 = 0$ est bien un couple solution de (E)
Ce qui initialise la proposition.

Supposons que le couple $(x_n; y_n)$ soit solution de (E) et étudions le rang $n+1$:

$$A\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_n + 8y_n \\ x_n + 3y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix}$$

Ce qui donne :

$$x_{n+1}^2 - 8y_{n+1}^2 = (3x_n + 8y_n)^2 - 8(x_n + 3y_n)^2 = 9x_n^2 + 64y_n^2 + 48x_ny_n - 8x_n^2 - 72y_n^2 - 48x_ny_n$$
$$= x_n^2 - 8y_n^2 = 1$$

Ainsi $(x_{n+1}; y_{n+1})$ est solution de (E) et cela confirme bien l'hérédité de la proposition.

$$\boxed{\text{Donc pour tout } n \in \mathbb{N}\ (x_n; y_n) \text{ est solution de } (E)}$$

b. On suppose quand indiqué que (x_n) est à valeurs strictement positives.

On peut alors montrer par récurrence que (y_n) est à valeurs positives. (Je te laisse faire la démonstration rigoureuse, elle ne devrait pas poser de difficulté particulière !)

On a $\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} - x_n = 3x_n + 8y_n - x_n = 2x_n + 8y_n > 0$

Et donc (x_n) est strictement croissante (ou $\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} > x_n$)

3. La suite (x_n) est strictement croissante et à valeurs entières, elle diverge donc vers $+\infty$ en prenant à chaque rang des valeurs « uniques ».

On peut faire le même raisonnement pour (y_n).

Et ainsi, (E) admet une infinité de couples solutions.

Partie B

1. Considérons 8 dont le seul diviseur premier est 2 et donc son carré 4 le divise également.

Il en est de même pour 9 dont le seul diviseur premier est 3.

Ainsi 8 et 9 sont des nombres puissants.

2. On a $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ et $n = a^2b^3$

Soit p un nombre premier.

p étant premier, si p divise n il divise a ou b ou les 2.

Si p divise a, il existe $a_1 \in \mathbb{N}$ tel que $a = pa_1$ et $a^2 = p^2a_1^2$
donc p^2 divise a^2, et finalement n.
Si p divise b, p^2 divise b^2 (de la même façon que précédemment), donc $b^2 \times b = b^3$ et donc n.
(Le cas où p divise les 2 n'apporte rien en plus, notons juste que dans ce cas p^2 divise ab et donc n.)

Donc pour $(a, b) \in \mathbb{N}^2$, $n = a^2b^3$ est un nombre puissant.

3. $x^2 - 1$ et x^2 sont évidemment consécutifs.

Considérons un nombre premier p qui divise x^2, on a nécessairement p divise x (il suffit de reprendre la décomposition en facteurs premiers !) et donc p^2 divise x^2 et x^2 est un nombre puissant.

De plus on considère que $(x; y)$ est solution de (E) ce qui permet d'écrire :
$x^2 - 8y^2 = 1$
d'où $x^2 - 1 = 8y^2$

Or, $8y^2 = 2^3y^2$ est donc de la forme a^2b^3 et donc est un nombre puissant d'après la question précédente.

On conclut que si $(x; y)$ est solution de (E), $x^2 - 1$ et x^2 sont des entiers consécutifs puissants.

4. La partie A nous permet de conclure directement grâce à l'infinité de solutions à (E)

Il existe bien une infinité de couples de nombres entiers consécutifs puissants.

On a vu également dans la partie précédente que la suite (x_n) est croissante, il faut donc évaluer les termes pour trouver une valeur dont le carré sera supérieur à 2018.

Reprenons donc les valeurs des suites (x_n) et (y_n) à partir des formules trouvées en A.2.a :

$$\begin{cases} x_1 = 3x_0 + 8y_0 = 3 \\ y_1 = x_0 + 3y_0 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = 3x_1 + 8y_1 = 17 \\ y_2 = x_1 + 3y_1 = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_3 = 3x_2 + 8y_2 = 99 \\ y_3 = x_2 + 3y_2 = 35 \end{cases}$$

On a $x_3^2 = 9801 > 2018$

Et donc on peut conclure que 9800 et 9801 sont 2 nombres puissants consécutifs.