Bac S 2018 - Liban - corrigé

Exercice 1

1. Le temps d'un appel est constitué du temps d'attente auquel s'ajoute le temps d'échange avec le conseiller.

Temps d'attente moyen :
Le temps d'attente est modélisé par une variable aléatoire X définie par la loi exponentielle de coefficient $\lambda = 0{,}02$

La moyenne est donnée par $\dfrac{1}{\lambda} = \dfrac{1}{0{,}02} = 50$

Le temps d'attente moyen est donc de $50\ \mathrm{s}$

Temps moyen d'échange avec le conseiller :
La moyenne d'une loi normale est donnée par son espérance (ou sa valeur « centrale »), qui vaut donc $\mu = 96$.
Le temps d'échange moyen avec un conseiller est donc de $96\ \mathrm{s}$

Finalement la durée moyenne de l'appel vaut $50 + 96 = 146$.

La durée moyenne d'un appel est de $2\ \mathrm{min}$ et $26\ \mathrm{s}$.

2.
a. La probabilité qu'un étudiant attende plus de $2\ \mathrm{min}$ (donc $120\ \mathrm{s}$) est donnée par :
$P(X > 120) = \mathrm{e}^{-120\lambda} = \mathrm{e}^{-0{,}02\times 120} \approx 0{,}09$

Donc la probabilité qu'un étudiant attende plus de $2\ \mathrm{min}$ est de $0{,}09$.

Remarque : le résultat est donné par l'intégration de la fonction de densité de probabilité. Je suis parti du principe que le résultat est connu, mais n'hésite pas à le retrouver, ça fait une petite révision d'intégration d'une fonction exponentielle !

b. Pour calculer la probabilité, on utilise la calculatrice (ou Géogébra dans mon cas), ce qui donne :
$P(Y \leqslant 90) \approx 0{,}4$

La probabilité que l'échange avec le conseiller soit inférieur à $90\ \mathrm{s}$ est de $0{,}4$.

3. La loi exponentielle est dite « sans mémoire » ou « sans vieillissement » et donc on peut écrire :
$P_{t\geqslant 60}\left(X \geqslant 60 + t\right) = P(X \geqslant t)$ (dans la question on considère $t = 30$.

Ainsi, raccrocher et rappeler n'a pas d'influence sur la probabilité d'attendre moins de $30\ \mathrm{min}$.

Exercice 2

1. On remarque déjà que les 2 nombres proposés sont conjugués l'un de l'autre. Je traite tout de même les 2 séparément, mais on peut tout à fait déduire l'écriture du 2ème à partir du 1er.

$$\left|1 + \mathrm{i}\right| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$
$$\left|1 - \mathrm{i}\right| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

Utilisons maintenant ce résultat :

$$1+\mathrm{i}=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

Et donc $1+\mathrm{i}=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)=\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$

De la même façon (on va utiliser la parité de la fonction cosinus et l'imparité de sinus) :

$$1-\mathrm{i}=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)-\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)=\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

Ce qui donne $1-\mathrm{i}=\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)=\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$

2. On pose $S_n=(1+\mathrm{i})^n+(1-\mathrm{i})^n$

a. On va utiliser la forme exponentielle pour trouver l'écriture du terme générique :

$$S_n=\left(\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\right)^n+\left(\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\right)^n=\left(\sqrt{2}\right)^n\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\frac{\pi}{4}}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\frac{\pi}{4}}\right)$$

Or $\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\frac{\pi}{4}}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\frac{\pi}{4}}=\cos\left(n\frac{\pi}{4}\right)+\mathrm{i}\sin\left(n\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(-n\frac{\pi}{4}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-n\frac{\pi}{4}\right)=2\cos\left(n\frac{\pi}{4}\right)$

Finalement $S_n=2\left(\sqrt{2}\right)^n\cos\left(n\frac{\pi}{4}\right)$

b.
D'après l'écriture précédente,

L'affirmation A est VRAIE

$$S_n=0\Leftrightarrow\cos\left(n\frac{\pi}{4}\right)=0$$

Et $\cos\left(n\frac{\pi}{4}\right)=0\Leftrightarrow n\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{N}$

Et donc les solutions sont $n=4k+2\ \ k\in\mathbb{N}$

Il y a bien une infinité de solutions est l'affirmation B est VRAIE

Exercice 3

1.

a. Au début de l'observation, on a $t=0$

Donc $S_1(0)\begin{cases}x(0)=140\\ y(0)=105\\ z(0)=-170\end{cases}$

b. Cherchons d'abord les coordonnées du sous-marin à $t=1$:

$$S_1(1)\begin{cases}x(1)=140-60=80\\ y(1)=105-90=15\\ z(1)=-170-30=-200\end{cases}$$

La distance parcourue par le sous-marin en 1 minute :

$$d_1^2 = \left(x(1) - x(0)\right)^2 + \left(y(1) - y(0)\right)^2 + \left(z(1) - z(0)\right)^2 = 60^2 + 90^2 + 30^2 = 12600$$

Et donc $d_1 = \sqrt{12600} \approx 112{,}25$

Finalement, on obtient que la vitesse du sous-marin est de $1{,}87\ \mathrm{ms}^{-1}$

c. La distance calculée précédemment correspond à la longueur de l'hypoténuse du triangle à considérer. Le côté opposé à l'angle α est la différence le long de la coordonnée z

On a donc $\sin(\alpha) = \dfrac{z(1) - z(0)}{d_1} = \dfrac{30}{\sqrt{12600}} = \dfrac{30}{30\sqrt{14}} = \dfrac{1}{\sqrt{14}}$

Et donc $\alpha \approx 15{,}5°$

2. Nous cherchons le moment auquel les 2 sous-marins sont à la même profondeur, c'est à dire $z_1(t) = z_2(t)$.

On connaît déjà $z_1(t) = -170 - 30t$

Pour le sous-marin 2, on a :
$z_2(0) = -68$
$z_2(3) = -248 = -68 + 3c$

D'où $c = \dfrac{-248 + 68}{3} = -60$
Et $z_2(t) = -68 - 60t$

On doit donc résoudre $-170 - 30t = -68 - 60t$
Ainsi $30t = 102$
Et donc $t = \dfrac{102}{30} \approx 3{,}4$

Les sous-marins seront à la même profondeur au bout de 3 min et 24 s

Exercice 4

1. Quelque soit l'entier $n > 0, f_n$ est dérivable sur l'intervalle considéré comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas.

$$\forall n > 0,\ \forall x \in [1;5],\ f_n'(x) = \frac{\frac{1}{x}x^n - n\,x^{n-1}\ln(x)}{x^{2n}} = \frac{x^{n-1}\left(1 - n\ln(x)\right)}{x^{2n}} = \frac{1 - n\ln(x)}{x^{n+1}}$$

Donc $\forall n > 0,\ \forall x \in [1;5],\ f_n'(x) = \dfrac{1 - n\ln(x)}{x^{n+1}}$

2. A_n correspond au maximum de la courbe ce qui signifie donc qu'il vérifie $f_n'(x) = 0$

Et donc $1 - n\ln(x) = 0$ ou $\ln(x) = \dfrac{1}{n}$ et donc $x = \mathrm{e}^{\frac{1}{n}}$

On obtient donc $f_n(x) = \dfrac{\ln(x)}{x^n} = \dfrac{\ln(x)}{\left(e^{\frac{1}{n}}\right)^n} = \dfrac{\ln(x)}{e}$

$\boxed{\text{Et donc tous les } A_n \text{ appartiennent à la courbe } \Gamma \text{ d'équation } y = \dfrac{1}{e}\ln(x)}$

3.

a. La fonction $\ln$ est strictement croissante (en particulier sur $\left[1;5\right]$) et donc :
$\forall x \in \left[1;5\right],\ \ln(1) \leqslant \ln(x) \leqslant \ln\left(5\right)$ ou $\forall x \in \left[1;5\right],\ 0 \leqslant \ln(x) \leqslant \ln\left(5\right)$

$\boxed{\text{Et finalement } \forall n > 0,\ \forall x \in \left[1;5\right],\ 0 \leqslant \dfrac{\ln(x)}{x^n} \leqslant \dfrac{\ln\left(5\right)}{x^n}}$

b. Pour $n > 1$, $\displaystyle\int_1^5 \frac{1}{x^n}\mathrm{d}x = -\frac{1}{n-1}\left[\frac{1}{x^{n-1}}\right]_1^5 = \frac{1}{n-1}\left(1-\frac{1}{5^{n-1}}\right)$

$\boxed{\text{Donc pour } n > 1,\ \displaystyle\int_1^5 \frac{1}{x^n}\mathrm{d}x = \frac{1}{n-1}\left(1-\frac{1}{5^{n-1}}\right)}$

<u>Remarque :</u> la condition $n > 1$ est indispensable car les primitives de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ ne sont évidemment pas de la même forme. Je te laisse les retrouver si besoin !

c. Utilisons les 2 questions précédentes (on considère $n > 1$ puisqu'on étudie le comportement quand $n \to +\infty$) :

$$0 \leqslant \int_1^5 f_n(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_1^5 \frac{\ln\left(5\right)}{x^n}\mathrm{d}x = \frac{\ln\left(5\right)}{n-1}\left(1-\frac{1}{5^{n-1}}\right)$$

Or quand $n \to +\infty$, $\dfrac{\ln\left(5\right)}{n-1}\left(1-\dfrac{1}{5^{n-1}}\right) \to 0$

$\boxed{\text{Et donc, d'après le théorème des gendarmes } \lim\limits_{n\to+\infty} \mathscr{A}_n = 0}$

Exercice 5 - hors spécialité

1. La probabilité p_2 se décompose en 2 possibilités :
   - gagné - gagné
   - perdu - gagné

D'après les informations données dans l'énoncé on a donc :
$p_2 = \dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{4}\times\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{16}+\dfrac{3}{8} = \dfrac{1}{16}+\dfrac{6}{16}$

$\boxed{\text{Ce qui confirme } p_2 = \dfrac{7}{16}}$

2. Le principe est le même que pour la question précédente.

Quelque soit $n \in \mathbb{N}$, le joueur a la probabilité p_n de gagner la n-ième partie et donc $1 - p_n$ de la perdre.

Ainsi, $p_{n+1} = \frac{1}{4}p_n + \frac{1}{2}\left(1 - p_n\right) = \frac{1}{4}p_n - \frac{1}{2}p_n + \frac{1}{2}$

Finalement $p_{n+1} = -\frac{1}{4}p_n + \frac{1}{2}$

3. En regardant les valeurs dans le tableau, on voit que les valeurs oscillent rapidement autour de $0{,}4$.

On conjecture que la suite $\left(p_n\right)$ tend vers $\frac{2}{5}$.

4.

a. Par définition, on a $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = p_n - \frac{2}{5}$

Ainsi $u_{n+1} = p_{n+1} - \frac{2}{5} = -\frac{1}{4}p_n + \frac{1}{2} - \frac{2}{5} = -\frac{1}{4}p_n + \frac{1}{10} = -\frac{1}{4}\left(p_n - \frac{2}{5}\right) = -\frac{1}{4}u_n$

Et donc $\left(u_n\right)$ est une suite géométrique de raison $-\frac{1}{4}$.

b. Je n'insiste pas sur les valeurs successives d'une suite géométrique, il faut juste faire attention, qu'on commence à $n = 1$ et pas 0.

$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_1 \times \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

De plus, $u_1 = p_1 - \frac{2}{5} = \frac{1}{4} - \frac{2}{5} = \frac{5}{20} - \frac{8}{20} = -\frac{3}{20}$

Et donc $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = -\frac{3}{20} \times \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

Et finalement, $\forall n \in \mathbb{N},\ p_n = \frac{2}{5} - \frac{3}{20} \times \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

c. Comme $\left|-\frac{1}{4}\right| < 1,\ \lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1} = 0$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} -\frac{3}{20} \times \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1} = 0$

On conclut donc que $\left(p_n\right)$ converge vers $\frac{2}{5}$

Ce résultat confirme bien l'hypothèse faite plus haut.

Ce résultat était prévisible, car $\frac{2}{5}$ est le seul point fixe de la fonction $x \mapsto -\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$.

<u>Remarque :</u> je te laisse vérifier ! C'est une propriété importante des suites récurrentes, à maîtriser.

Exercice 5 - spécialité

1. On complète les lignes 5 et 6 :

$A \leftarrow B$

$B \leftarrow C$

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Ainsi $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$A^3 = A^2 \times A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$A^4 = A^3 \times A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

Donc $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $A^4 = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

Calculons maintenant A^5 :

$A^5 = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$

On confirme bien $A^5 = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$

3.

a. On a $A^p \times A^q = A^{p+q}$

En utlisant la formule donnée dans l'énoncé :

$A^p \times A^q = \begin{pmatrix} a_{p+1} & a_p \\ a_p & a_{p-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{q+1} & a_q \\ a_q & a_{q-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{p+1}a_{q+1} + a_pa_q & a_{p+1}a_q + a_pa_{q-1} \\ a_pa_{q+1} + a_{p-1}a_q & a_pa_q + a_{p-1}a_{q-1} \end{pmatrix}$

Donc $A^p \times A^q = A^{p+q} = \begin{pmatrix} a_{p+1}a_{q+1} + a_pa_q & a_{p+1}a_q + a_pa_{q-1} \\ a_pa_{q+1} + a_{p-1}a_q & a_pa_q + a_{p-1}a_{q-1} \end{pmatrix}$

D'après l'énoncé, on a également $A^{p+q} = \begin{pmatrix} a_{p+q+1} & a_{p+q} \\ a_{p+q} & a_{p+q-1} \end{pmatrix}$

On déduit donc $a_{p+q} = a_pa_{q+1} + a_{p-1}a_q$

Remarque : on voit qu'il y a 2 expressions pour a_{p+q}, je te laisse vérifier qu'elles sont équivalentes !

b. On suppose que r divise a_p et a_q.

Il existe dont des entiers k et k' tels que $a_p = kr$ et $a_q = k'r$

On a donc $a_{p+q} = a_pa_{q+1} + a_{p-1}a_q = kra_{q+1} + k'ra_{p-1} = r\left(ka_{q+1} + k'a_{p-1}\right)$

Ainsi, si r divise a_p et a_q, r divise a_{p+q}.

c. Raisonnons par récurrence comme proposé avec la proposition que pour p entier non nul, pour tout entier naturel n non nul, a_p divise a_{np}

Initialisation :

Pour $n = 1$, le résultat est évident, $a_p = a_{1p}$

Hérédité :

Supposons la proposition vraie au rang n et étudions le rang $n + 1$

$a_{(n+1)p} = a_{np+p}$

Par hypothèse de récurrence a_p divise a_{np} (et également a_p trivialement), on déduit de la question précédente que a_p divise $a_{(n+1)p}$.

L'hérédité de la proposition est bien confirmée.

Donc pour p entier non nul, pour tout entier naturel n non nul, a_p divise a_{np}

4.

a. n n'est pas premier, on peut donc l'écrire $n = pq$ avec p et q entiers.

Comme $n \geqslant 5$, on a forcément p ou q (ou les 2) supérieur à 3 (supposons que ça soit le cas pour p) et donc $a_p > 1$.

Ainsi, $a_n = a_{pq}$ est donc divisible par $a_p > 1$ et n'est donc pas premier.

Et donc si $n \geqslant 5$ n'est pas premier, alors a_n n'est pas premier.

Remarque : on peut noter dans le tableau que $a_4 = a_{2\times 2} = 3$ qui est premier. La règle ne s'applique par car $a_2 = 1$. D'où la restriction.

b. 19 est bien un nombre premier et manifestement a_{19} ne l'est pas.

La réciproque de la question 4.a est donc fausse.