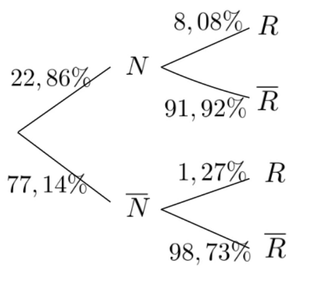
Bac 2024 - Amérique du Nord 2 - corrigé

Exercice 1

Partie I

1. Voici l'arbre pondéré



2. La probabilité qu'un véhicule soit neuf et hybride rechargeable est :

$$P(N \cap R) = P(N) \times P_N(R) = 0{,}2286 \times 0{,}0808 \approx 0{,}0185$$

Donc la probabilité qu'un véhicule soit neuf et hybride rechargeable est $1{,}85\ \%$

3. La probabilité que le véhicule soit hybride rechargeable est, en utilisant la formule des probabilités totales :

$$P(R) = P(N \cap R) + P\left(\overline{N} \cap R\right) = 0{,}2286 \times 0{,}0808 + 0{,}7714 \times 0{,}0127 \approx 0{,}0283$$

La probabilité que le véhicule soit hybride rechargeable est $2{,}83\ \%$

4. On utilise la formule des probabilités conditionnelles :

$$P_R(N) = \frac{P(N \cap R)}{P(R)} \approx \frac{0{,}0185}{0{,}0283} \approx 0{,}6533$$

Donc la probabilité qu'un véhicule hybride rechargeable soit neuf est $65{,}33\ \%$

Partie II

1. D'après les indications de l'énoncé, on peut dire que :

La X soit la loi binomiale $\mathscr{B}\left(n = 500,\ p = 0{,}65\right)$

2. La probabilité est donnée par la formule :

$$P\left(X = 325\right) = \binom{500}{325} \times 0{,}65^{325} \times 0{,}35^{175} \approx 0{,}0374$$

La probabilité $P\left(X=325\right)\approx 3{,}74\,\%$

3. On a $P\left(X\geqslant 325\right)=1-P\left(X\leqslant 324\right)\approx 1-0{,}4794\approx 0{,}5206$

Donc $P\left(X\geqslant 325\right)\approx 52{,}06\,\%$. Sur 500 voitures, il y a environ 1 chance sur 2 d'en avoir plus de 325 neuves.

Partie III

1. La probabilité de chaque événement est la même quand dans les questions précédentes.

Donc la probabilité que les n véhicules soient d'occasion est $p_n=0{,}35^n$

2. La probabilité d'avoir au moins un véhicule neuf est $q_n=1-p_n$

On veut donc $1-p_n\geqslant 0{,}9999$

D'où $p_n\leqslant 0{,}0001$ ou $0{,}35^n\leqslant 0{,}0001$

Par croissance de la fonction logarithme, on déduit $\ln\left(0{,}35^n\right)\leqslant\ln\left(0{,}0001\right)$
Donc $n\ln\left(0{,}35\right)\leqslant\ln\left(0{,}0001\right)$

Ainsi $n\geqslant\dfrac{\ln\left(0{,}0001\right)}{\ln\left(0{,}35\right)}$

<u>Attention :</u> comme toujours dans les exercices des probabilités, le passage au logarithme amène des nombres négatifs, il faut donc changer le sens des inégalités !

Donc on veut $n\geqslant 8{,}8$

Il faut prendre au moins 9 véhicules pour que la probabilité d'en avoir au moins un neuf soit de $99{,}99\,\%$

Exercice 2

1. D'après le schéma, on lit :

$F\left(3;0;1\right)$, $H\left(0;1;1\right)$ et $M\left(\dfrac{3}{2};1;0\right)$

2.

a. Considérons les vecteurs $\overrightarrow{HM}$ et $\overrightarrow{HF}$ du plan (HMF)

On a $\overrightarrow{HM}\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\0\\-1\end{pmatrix}$ et donc $\overrightarrow{HM}\,.\,\vec{n}=\dfrac{3}{2}\times 2+0\times 6-1\times 3=0$

D'autre part $\overrightarrow{HF}\begin{pmatrix}3\\-1\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{HF}\,.\,\vec{n}=3\times 2-1\times 6+0\times 3=0$

On a donc $\vec{n}$ orthogonal à $\overrightarrow{HM}$ et $\overrightarrow{HF}$. (2 vecteurs sont orthogonaux ssi leur produit scalaire est nul)
De plus $\overrightarrow{HM}$ et $\overrightarrow{HF}$ ne sont pas colinéaires.

$\boxed{\text{On conclut donc que } \vec{n} \text{ est orthogonal au plan } (HMF)}$

b. De la question précédente on déduit qu'une équation cartésienne de (HMF) est de la forme $2x + 6y + 3z + k = 0$ avec $k \in \mathbb{R}$.

De plus, on a en particulier $H \in (HMF)$ et donc $2 \times 0 + 6 \times 1 + 3 \times 1 + k = 0$
D'où $k = -9$

$\boxed{\text{Finalement, une équation cartésienne de } (HMF) \text{ est } 2x + 6y + 3z - 9 = 0}$

c. Un vecteur orthogonal à $\mathscr{P}$ est $\vec{u}\begin{pmatrix} 5 \\ 15 \\ -3 \end{pmatrix}$

Or $\vec{n}$ et $\vec{u}$ ne sont pas colinéaires.

$\boxed{\text{Donc } (HMF) \text{ et } \mathscr{P} \text{ ne sont pas parallèles.}}$

3. On a $\overrightarrow{DG}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Cela nous donne $M\left(x;y;z\right) \in (DG) \Leftrightarrow \overrightarrow{DM} = t\overrightarrow{DG},\ t \in \mathbb{R}$

Ce qu'on traduit en système : $M\left(x;y;z\right) \in (DG) \Leftrightarrow \begin{cases} x - 0 = 3t \\ y - 1 = 0 \\ z - 0 = t \end{cases},\ t \in \mathbb{R}$

$$\boxed{\text{Finalement, une représentation paramétrique de } (DG) \text{ est } \begin{cases} x = 3t \\ y = 1 \\ z = t \end{cases},\ t \in \mathbb{R}}$$

4. Si $N\left(x;y;z\right)$ est le point d'intersection de (DG) et (HMF), alors ses coordonnées vérifient les équations de ces 2 objets.

On a donc le système $\begin{cases} x = 3t \\ y = 1 \\ z = t \\ 2x + 6y + 3z - 9 = 0 \end{cases}$ avec $x,\ y,\ z$ et t dans $\mathbb{R}$

En remplaçant dans la dernière ligne : $6t + 6 + 3t - 9 = 0$

D'où $t = \dfrac{1}{3}$

$\boxed{\text{Et donc } N\left(1;1;\dfrac{1}{3}\right)}$

5. Vérifions déjà que $R\left(3;\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right)$ est bien sur le plan (HMF).

$$2\times 3+6\times\frac{1}{4}+3\times\frac{1}{2}-9=6+\frac{3}{2}+\frac{3}{2}-9=0$$

Donc $R\in(HMF)$

Pour que R soit le projeté orthogonal de G sur (HMF) il faut que $\overrightarrow{RG}$ soit orthogonal à (HMF) ou encore colinéaire à $\overrightarrow{n}$

Or $\overrightarrow{RG}\begin{pmatrix}0\\ \frac{3}{4}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}$ et n'est donc manifestement colinéaire à $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}2\\6\\3\end{pmatrix}$

$\boxed{\text{Donc } R \text{ n'est pas le projeté orthogonal de } G \text{ sur } (HMF).}$

Exercice 3

1. g est bien définie et dérivable sur $[0;1]$ (et même sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynomiale)

Et $\forall x\in[0;1],\ g'(x)=2-2x=2(1-x)$

Donc $\forall x\in[0;1[,\ g'(x)>0$ (et s'annule en 1).

$\boxed{\text{Ceci confirme que } g \text{ est strictement croissante sur } [0;1] \text{ avec } g(0)=0 \text{ et } g(1)=1.}$

2. $u_1=g\left(u_0\right)=g\left(\frac{1}{2}\right)=2\times\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^2=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

$$u_2=g\left(u_1\right)=2\times\frac{3}{4}-\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{6}{4}-\frac{9}{16}=\frac{24-9}{16}=\frac{15}{16}$$

$\boxed{\text{Donc } u_1=\frac{3}{4} \text{ et } u_2=\frac{15}{16}}$

3. D'après la question 1, on sait que g est une bijection de $[0;1]$ dans $[0;1]$
Ce qui implique en particulier que $\forall x\in\left]0;1\right[,\ g(x)\in\left]0;1\right[$.

En utilisant ceci, on montre rapidement par récurrence que $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n\in\left]0;1\right[$.
On initialise la proposition avec $u_0=\frac{1}{2}\in\left]0;1\right[$

Supposons qu'au rang n on ait $u_n\in\left]0;1\right[$ et étudions le rang $n+1$:
$u_{n+1}=g\left(u_n\right)\in\left]0;1\right[$ d'après la remarque préliminaire.
Ce qui nous assure de l'hérédité de la proposition.

On a donc déjà l'encadrement : $\forall n\in\mathbb{N},\ 0<u_n<1$.

Il faut maintenant étudier la monotonie de la suite :
$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n = g\left(u_n\right) - u_n = 2u_n - u_n^2 - u_n = u_n - u_n^2$

Or, comme $u_n \in \left]0;1\right[$, on a $u_n > u_n^2$

<u>Remarque :</u> propriété à connaitre ! Elle est souvent utile.

Donc $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n > 0$

Ce qui confirme que la suite $\left(u_n\right)$ est (strictement) croissante.

On a donc l'encadrement $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < u_n < u_{n+1} < 1$

4. On déduit donc que $\left(u_n\right)$ est croissante et majorée.

D'après le théorème de la limite monotone, $\left(u_n\right)$ est convergente.

5. $\left(u_n\right)$ étant une suite définie par récurrence par une fonction continue, elle converge vers un point fixe de g.

On a vu que sur $\left[0;1\right]$ g avait 2 points fixes 0 et 1.

Comme la suite est croissante (et positive), sa limite ne peut pas être 0.

Donc $\left(u_n\right)$ converge vers $l = 1$.

6. On définit $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \ln\left(1 - u_n\right)$

On a donc $v_{n+1} = \ln\left(1 - u_{n+1}\right) = \ln\left(1 - 2u_n + u_n^2\right) = \ln\left(\left(1 - u_n\right)^2\right) = 2\ln\left(1 - u_n\right) = 2v_n$

On confirme donc que $\left(v_n\right)$ est géométrique de raison 2 et $v_0 = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$.

7. Comme $\left(v_n\right)$ est une suite géométrique son terme générique est donné par $v_n = 2^n v_0$

Et donc $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = 2^n \ln\left(\frac{1}{2}\right)$.

8. Soit $n \in \mathbb{N}$.

D'après ce qu'on vient de voir $v_n = 2^n \ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln\left(1 - u_n\right)$

En passant à l'exponentielle, on obtient : $\left(\frac{1}{2}\right)^{2^n} = 1 - u_n$

Et finalement $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}$

Comme $\frac{1}{2} < 1,\ \lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n} = 0$

$\boxed{\text{On retrouve } \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1}$

9. Voici une proposition de script :

```
def seuil():
    n=0
    u=0.5
    while u<0.95:
        n=n+1
        u=(2*u)-(u*u)
        print (u)
    print (n)
    return n
```

Exercice 4

1. Par définition, $a > 0$ et $\forall x \in \left]0; +\infty\right[,\ f(x) = a\ln(x)$

L'intersection de $\mathscr{C}$ avec l'axe des abscisses est définie par x tel que $f(x) = 0$.

Or $f(x) = 0 \Leftrightarrow a\ln(x) = 0$
Et comme $a \neq 0, f(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(x) = 0$

$\boxed{\text{Donc } \mathscr{C} \text{ croise l'axe des abscisses en } x = 1}$

2. F et bien définie et dérivable sur $\left]0; +\infty\right[$ comme somme et produit de fonctions qui le sont.

$$\forall x \in \left]0; +\infty\right[,\ F'(x) = a\left(\ln(x) + x \times \frac{1}{x} - 1\right) = a\ln(x) = f(x)$$

$\boxed{\text{On confirme donc que } F \text{ est une primitive de } f \text{ sur } \left]0; +\infty\right[}$

3. L'air sous la courbe est donnée par :

$$\mathscr{A} = \int_1^{x_0} f(x)\,\mathrm{d}x = F(x_0) - F(1) = a\left(x_0\ln(x_0) - x_0\right) + a = a\left(x_0\ln(x_0) - x_0 + 1\right)$$

$\boxed{\text{Donc } \mathscr{A} = a\left(x_0\ln(x_0) - x_0 + 1\right)}$

4. On a les coordonnées de B qui sont $\left(0; f(x_0)\right)$

Pour trouver l'ordonnée de A, nous allons chercher l'équation de la tangente T. L'équation est de la forme :
$y = xf'(x_0) + b,\ b \in \mathbb{R}$.
Or $f'(x_0) = \frac{a}{x_0}$ (on dérive une fonction de référence, je n'insiste pas)
Et en x_0, $y = f(x_0)$

Donc $f\left(x_0\right) = x_0 \times \frac{a}{x_0} + b$ et $b = f\left(x_0\right) - a$

Finalement (même si on ne s'en sert pas par la suite, mais concluons tout de même), l'équation réduite de T est :

$y = x\frac{a}{x_0} + f\left(x_0\right) - a$

On déduit que $A\left(0; f\left(x_0\right) - a\right)$

Et finalement $AB = a$ qui est bien constante.