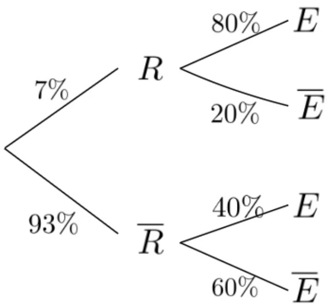
BAC 2024 - Amérique du Nord 1 - corrigé

Exercice 1

Partie A

1. On a $\overline{R}$ qui correspond à tirer un objet commun et $\overline{E}$ qui correspond à un bouclier.



On a $P(R \cap E) = \dfrac{7}{100} \times \dfrac{80}{100} = \dfrac{56}{1000}$

$\boxed{\text{Et donc } P(R \cap E) = 5{,}6\,\%}$

2. La probabilité de tirer une épée est :

$P(R \cap E) + P\left(\overline{R} \cap E\right) = \dfrac{56}{1000} + \dfrac{93}{100} \times \dfrac{40}{100} = \dfrac{56}{1000} + \dfrac{372}{1000} = \dfrac{428}{1000}$

$\boxed{\text{Finalement, la probabilité de tirer une épée est de } 42{,}8\,\%}$

3. On a la formule des probabilités conditionnelles : $P_E(R) = \dfrac{P(R \cap E)}{P(E)}$

D'après les questions précédentes : $P_E(R) = \dfrac{56}{428} \approx 0{,}13$

$\boxed{\text{Et donc la probabilité qu'une épée tirée soit rare est de } 13\,\%}$

Partie B

1. Les tirages étant indépendants et le tirage de pouvant donner que 2 résultats R et $\overline{R}$. Il y a 30 tirages/

$\boxed{\text{La loi } X \text{ suit donc une loi binomiale } \mathscr{B}(30; 0{,}07) \text{ et son espérance est donc } E(X) = 2{,}1}$

2. $P\left(X < 6\right) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) + P\left(X = 5\right)$

$P(X = 0) = 0{,}93^{30} \approx 0{,}11$

$P(X=1) = 30 \times 0{,}07 \times 0{,}93^{29} \approx 0{,}26$

$P(X=2) = \binom{30}{2} \times 0{,}07^2 \times 0{,}93^{28} \approx 0{,}28$

$P(X=3) = \binom{30}{3} \times 0{,}07^3 \times 0{,}93^{27} \approx 0{,}20$

$P(X=4) = \binom{30}{4} \times 0{,}07^4 \times 0{,}93^{26} \approx 0{,}1$

$P\left(X=5\right) = \binom{30}{5} \times 0{,}07^5 \times 0{,}93^{25} \approx 0{,}04$

Donc $P\left(X<6\right) \approx 0{,}983$

3. En reprenant les éléments de la question précédente, on obtient :
$P(X \geqslant 2) = 1 - \left(P(X=0) + P(X=1)\right) \approx 0{,}63$

Et $P(X \geqslant 3) \approx 0{,}35$

Donc la plus grande valeur de k telle que $P\left(X \geqslant k\right) \geqslant 0{,}5$ est $k = 2$

4. Dans cette question, on considère une loi binomiale $\mathscr{B}(N; 0{,}07)$ et on veut que $P(X \geqslant 1) \geqslant 0{,}95$

Or $P(X \geqslant 1) = 1 - P(X=0) = 1 - 0{,}93^N$

On cherche donc N tel que $1 - 0{,}93^N \geqslant 0{,}95$
D'où $0{,}93^N \leqslant 0{,}05$

Par croissante de la fonction logarithme, on déduit $N \ \ln(0{,}93) \leqslant \ln\left(0{,}05\right)$

Et en n'oubliant pas qu'on divise par un nombre négatif : $N \geqslant \dfrac{\ln\left(0{,}05\right)}{\ln(0{,}93)} \approx 41{,}28$

Le nombre de tirage minimum pour avoir une probabilité de $95\ \%$ d'obtenir un objet rare est de 42.

Exercice 2

1. Un vecteur directeur de (AB) est $\overrightarrow{AB}\left(x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A\right)$ et donc $\overrightarrow{AB}(3; 1; -3)$

Une représentation paramétrique de (AB) est donc $\begin{cases} x = 3t + x_0 \\ y = t + y_0 \\ z = -3t + z_0 \end{cases}$ avec $x_0,\ y_0,\ z_0$ et t des réels.

<u>Remarque :</u> on peut déjà répondre par élimination à ce stade, mais finissons tout de même de déterminer une représentation de (AB).

De plus $A \in (AB)$ et vérifie donc les équations ainsi :

Une représentation paramétrique de (AB) est donc $\begin{cases} x = 3t + 1 \\ y = t \\ z = -3t + 3 \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$

Réponse c.

2. Pour répondre le plus rapidement à la question, utilisons l'équation donnant y :
Pour les points M, N et P, on obtient $t = 1$.
Mais $t = 1$ donne $x = 7$ et $z = 2$. Aucun de ces 3 point n'est donc sur (d).

On vérifie pour R. Sa coordonnée en y nous donne $t = -\dfrac{3}{2}$ et on obtient alors bien $x = -3$ et $z = 7$.

Réponse d.

3. Un vecteur directeur de (d) est $\overrightarrow{u}\,(2;3;-1)$.

<u>Remarque :</u> la « formule » du cours nous donne plutôt $\overrightarrow{u_0}\left(4;6;-2\right)$, mais on peut diviser toutes les coordonnées par 2 et obtenir un vecteur colinéaire plus simple.

Un vecteur directeur de (d') est $\overrightarrow{v}\,(3;-2;1)$

Les vecteurs ne sont pas colinéaires, donc les droites ne sont ni parallèles ni confondues.

Cherchons donc si elles ont un point commun :
On veut donc $\begin{cases} 3 + 4t = -2 + 3t \\ 6t = -1 - 2t \\ 4 - 2t = 1 + t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$

Le 1ère ligne impose $t = -5$, mais les autres égalités ne sont pas vérifiées.

Donc (d) et (d') ne sont pas coplanaires.

Réponse b.

4. On a vu à la question précédente que $\overrightarrow{u}\,(2;3;-1)$ est un vecteur directeur de (d)

On en déduit qu'une équation de (P) va être $2x + 3y - z + k = 0$, $k \in \mathbb{R}$

<u>Attention :</u> en regard de la remarque précédente, on ne peut pas conclure tout de suite, les réponses a et c peuvent correspondre.

On sait que $I\,(2;1;0) \in (P)$, donc on obtient $4 + 3 + k = 0$
D'où $k = -7$

Réponse a

Exercice 3

Partie A

1. Attention au repère qui n'est pas orthonormé.

$\boxed{\text{On lit } f'(1) = 3}$

En utilisant l'ordonnée à l'origine, on trouve :

$\boxed{\text{L'équation de } (T) \text{ est } y = 3x - 4}$

2. D'après ce que nous pouvons voir sur le graphique :

$\boxed{f \text{ semble concave sur }]0;1] \text{ et convexe ensuite, sur } [1;+\infty[. \ A \text{ est un point d'inflexion.}}$

<u>Remarque :</u> je ne donne pas de détails, n'hésite pas à réviser les définitions en cas de doute.

Partie B

1. La limite en $+\infty$ ne présente pas de forme indéterminée :

Quand $x \to +\infty$, $\ln\left(x^2\right) \to +\infty$ (donc $x\ln\left(x^2\right)$ également) et $\dfrac{1}{x} \to 0$

$\boxed{\text{Donc } \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$

En 0, on rencontre une forme indéterminée :

Quand $x \to 0$, $-\dfrac{1}{x} \to -\infty$ et $x\ln\left(x^2\right) = 2x\ln(x) \to 0$ (par croissante comparée)

$\boxed{\text{Donc } \lim_{x\to 0} f(x) = -\infty}$

2.
a. Je n'insiste pas car l'énoncé nous dit d'admettre le résultat, mais la double dérivation ne pose pas de problème car les différents éléments qui composent la fonction le sont bien. N'hésite pas à le revérifier si besoin.

$$\forall x \in]0;+\infty[, \ f'(x) = \ln\left(x^2\right) + x \times \frac{2x}{x^2} + \frac{1}{x^2}$$

$$\boxed{\text{Et finalement } \forall x \in]0;+\infty[, \ f'(x) = \ln\left(x^2\right) + \frac{1}{x^2} + 2}$$

b. En dérivant à nouveau :

$$\forall x \in]0;+\infty[, \ f''(x) = \frac{2}{x} - \frac{2}{x^3} = \frac{2x^2-2}{x^3} = \frac{2\left(x^2-1\right)}{x^3}$$

$$\boxed{\text{On trouve bien } \forall x \in]0;+\infty[, \ f''(x) = \frac{2(x+1)(x-1)}{x^3}}$$

3.

a. On se place sur $\left]0; +\infty\right[$, donc on a $x^3 > 0$ et $x + 1 > 0$

Donc f'' est du signe de $x - 1$

On retrouve bien que f est concave sur $\left]0; 1\right]$ puis convexe sur $\left[1; +\infty\right[$.

<u>Rappel :</u> la convexité dépend du signe de la dérivé seconde. f est convexe si $f'' \geqslant 0$, concave sinon. Cela équivaut à f' croissante ou décroissante.

b. De la question précédente, on tire que f' est décroissante sur $\left]0; 1\right]$ puis croissante sur $\left[1; +\infty\right[$, avec donc un minimum en $x = 1$ avec $f'(1) = 3$.

Vérifions les limité de f', pour s'assurer que notre résultat est cohérent.
Sans difficulté, $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty$

En écrivant $\forall x \in \left]0; +\infty\right[,\ f'(x) = \ln\left(x^2\right) + \dfrac{1}{x^2} + 2 = \dfrac{1}{x^2}\left(1 + x^2\ln\left(x^2\right) + 2x^2\right)$

Ce qui nous donne $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = +\infty$

Finalement, $\forall x \in \left]0; +\infty\right[,\ f'(x) > 0$ et f est strictement croissante.

4.

a. Les limites calculées en 1 et la stricte croissante démontrée à la question précédente, on peut applique le théorème des valeurs intermédiaires.

On conclut donc que $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in \left]0; +\infty\right[$

b. Pour la 1ère question, je pars du principe qu'on utilise la calculatrice pour obtenir le résultat.

On trouve $\alpha \approx 1{,}328$

α vérifie : $\alpha \ln\left(\alpha^2\right) - \dfrac{1}{\alpha} = 0$

D'où $\ln\left(\alpha^2\right) = \dfrac{1}{\alpha^2}$ et en passant à l'exponentielle :

α vérifie : $\alpha^2 = \exp\left(\dfrac{1}{\alpha^2}\right)$

Exercice 4

1. $I_0 = \int_0^\pi \sin(x)\,\mathrm{d}x = -\left[\cos(x)\right]_0^\pi = 1 + 1 = 2$

$\boxed{\text{Donc } I_0 = 2}$

2.
a. Quelque que soit n dans $\mathbb{N}$ et x dans $\left[0;\pi\right]$, on a :
$\sin(x) \geqslant 0$ et $\mathrm{e}^{-nx} > 0$, donc $\mathrm{e}^{-nx}\sin(x) \geqslant 0$.

Ceci permet d'affirmer que $\int_0^\pi \mathrm{e}^{-nx}\sin(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$

$\boxed{\text{Et donc } \forall n \in \mathbb{N},\ I_n \geqslant 0}$

b. Soit n dans $\mathbb{N}$:
$I_{n+1} - I_n = \int_0^\pi \mathrm{e}^{-(n+1)x}\sin(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^\pi \mathrm{e}^{-nx}\sin(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^\pi \mathrm{e}^{-(n+1)x}\sin(x) - \mathrm{e}^{-nx}\sin(x)\,\mathrm{d}x$
$= \int_0^\pi \mathrm{e}^{-nx}\sin(x)\left(\mathrm{e}^{-x} - 1\right)\mathrm{d}x$

Or, $\forall x \in \left[0;\pi\right]$, $\mathrm{e}^{-x} - 1 \leqslant 0$, donc $\mathrm{e}^{-nx}\sin(x)\left(\mathrm{e}^{-x} - 1\right) \leqslant 0$

$\boxed{\text{On conclut donc } \forall n \in \mathbb{N},\ I_{n+1} - I_n \leqslant 0}$

c. D'après les questions précédentes, la suite $\left(I_n\right)$ est décroissante et minorée.

$\boxed{\text{D'après le théorème de la limite monotone, la suite } \left(I_n\right) \text{ converge.}}$

3.
a. On sait que $\forall x \in \left[0;\pi\right],\ 0 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$ et donc $\forall x \in \left[0;\pi\right],\ \mathrm{e}^{-nx}\sin(x) \leqslant \mathrm{e}^{-nx}$.

$\boxed{\text{Cela permet de conclure que } \forall n \in \mathbb{N},\ I_n \leqslant \int_0^\pi \mathrm{e}^{-nx}\mathrm{d}x}$

b. $\forall n \geqslant 1,\ \int_0^\pi \mathrm{e}^{-nx}\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{n}\mathrm{e}^{-nx}\right]_0^\pi = -\frac{1}{n}\left(\mathrm{e}^{-n\pi} - 1\right)$

$\boxed{\text{Et donc } \forall n \geqslant 1,\ \int_0^\pi \mathrm{e}^{-nx}\mathrm{d}x = \frac{1 - \mathrm{e}^{-n\pi}}{n}}$

c. On a donc un encadrement, $\forall n \geqslant 1,\ 0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1 - \mathrm{e}^{-n\pi}}{n}$

Or, quand $n \to +\infty$, $\frac{1 - \mathrm{e}^{-n\pi}}{n} \to 0$

Donc d'après le théorème des gendarmes, $\lim_{n \to +\infty} I_n = 0$

4.

a. Soit $n \geqslant 1$:

- Commençons par dériver e^{-nx} et intégrer $\sin(x)$:

$$I_n = \int_0^{\pi} e^{-nx} \sin(x)\, dx = \left[-e^{-nx}\cos(x)\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} n e^{-nx}\cos(x)\, dx = e^{-n\pi} + 1 - n \int_0^{\pi} e^{-nx}\cos(x)\, dx$$

Et donc $I_n = 1 + e^{-n\pi} - n J_n$

- Cette fois, nous allons dériver $\sin(x)$ et intégrer e^{-nx} :

$$I_n = \int_0^{\pi} e^{-nx} \sin(x)\, dx = \left[-\frac{1}{n}e^{-nx}\sin(x)\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} -\frac{1}{n}e^{-nx}\cos(x)\, dx = \frac{1}{n}\int_0^{\pi} e^{-nx}\cos(x)\, dx$$

Et cette fois on trouve $I_n = \frac{1}{n} J_n$

b. On considère toujours $n \geqslant 1$.

L'égalité précédente nous permet d'écrire :

$n^2 I_n = n J_n$

En intégrant cela dans la 1ère égalité : $I_n = 1 + e^{-n\pi} - n^2 I_n$

$I_n + n^2 I_n = 1 + e^{-n\pi}$

Et finalement $I_n = \dfrac{1 + e^{-n\pi}}{n^2 + 1}$

5. Voici le script adapté :

```
from math import *
def seuil():
    n=0
    I=2
    print (I)
    while I>=0.1:
        n=n+1
        I=(1+exp(-n*pi))/(n*n+1)
    return n
```