Bac S 2007 - Métropole

Exercice 1

1. Déterminons un vecteur orthogonal à chacun des plans indiqués :

$\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$ est orthogonal à (P) et $\overrightarrow{n'}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$ est orthogonal à (P')

<u>Rappel :</u> *dans un repère orthonormé, un vecteur orthogonal au plan d'équation $ax + by + cz + d = 0$ est* $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$

Calculons maintenant le produit scalaire de ces 2 vecteurs :
$\overrightarrow{n}.\overrightarrow{n'} = -1 + 2 - 1 = 0$
Et donc $\overrightarrow{n} \perp \overrightarrow{n'}$

$\boxed{\text{Et donc les 2 plans } (P) \text{ et } (P')}$

2. Considérons $M\left(x, y, z\right)$ un point de $\left(d\right)$, dont les coordonnées sont données par la représentation paramétrique, fonction de $t \in \mathbb{R}$.

Ces coordonnées donnent :
$$x + 2y - z + 1 = -\frac{1}{3} + t + 2 \times \left(-\frac{1}{3}\right) - t + 1 = 0$$
Et donc $\forall M \in \left(d\right),\ M \in (P)$

D'autre part :
$$-x + y + z = \frac{1}{3} - t - \frac{1}{3} + t = 0$$
On a donc également $\forall M \in \left(d\right),\ M \in (P')$

$\boxed{\text{Ce qui permet de conclure que } (P) \text{ et } (P') \text{ se coupent selon } \left(d\right)}$

3. Notons $d\,(A; P)$ et $d\,(A; P')$ les distances de A respectivement à (P) et (P').

<u>Rappel :</u> *la distance d'un point $A\left(x_A, y_A, z_A\right)$ à un plan $\mathscr{P}$ d'équation $ax + by + cz + d = 0$ est donnée par la formule* $\dfrac{\left|ax_A + by_A + cz_A + d\right|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

Ce qui donne donc :
$$d\,(A; P) = \frac{\left|2 - 1 + 1\right|}{\sqrt{1 + 4 + 1}} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$d\,(A; P') = \frac{\left|1 + 1\right|}{\sqrt{1 + 1 + 1}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$\boxed{\text{Donc } d(A;P) = \dfrac{\sqrt{6}}{3} \text{ et } d(A;P') = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}}$

4. Nous allons utiliser le résultat précédent en introduisant les projetés orthogonaux H et H' de A sur (P) et (P') et D son projeté sur $\left(d\right)$.

Par construction, $AHDH'$ est un rectangle dont $\left[AD\right]$ est une diagonale. AD est également la distance de A à $\left(d\right)$.

En utilisant le théorème de Pythagore, on obtient :
$AD^2 = d(A;P)^2 + d(A;P')^2 = \dfrac{6}{9} + \dfrac{12}{9} = 2$

$\boxed{\text{Et finalement } AD = \sqrt{2}}$

Exercice 2

1. Rappelons déjà la formule de la dérivée du produit de 2 fonctions dérivables sur un segment $\left[a,b\right]$.
En utilisant une notation « simplifiée » : $(uv)' = u'v + v'u$

Par hypothèse, u' et v' sont continues.
On peut donc écrire :
$\displaystyle\int_a^b u'(x)v(x) + v'(x)u(x)\,\mathrm{d}x = \left[u(x)v(x)\right]_a^b$

Et par linéarité de l'intégrale : $\displaystyle\int_a^b u'(x)v(x) + v'(x)u(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b v'(x)u(x)\,\mathrm{d}x$

$\boxed{\text{D'où la formule d'intégration par parties : } \displaystyle\int_a^b v'(x)u(x)\,\mathrm{d}x = \left[u(x)v(x)\right]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x}$

2.
a. Utilisons une intégration par parties tout d'abord avec $u(x) = \sin(x)$ et $v'(x) = e^x$:
$I = \displaystyle\int_0^\pi e^x \sin(x)\,\mathrm{d}x = \left[e^x \sin(x)\right]_0^\pi - \int_0^\pi e^x \cos(x)\,\mathrm{d}x$
Or $\sin(0) = \sin(\pi) = 0$

Et donc $I = -\displaystyle\int_0^\pi e^x \cos(x)\,\mathrm{d}x = -J$

Reprenons maintenant la formule d'intégration par parties avec $u(x) = e^x$ et $v'(x) = \sin(x)$:
$I = \displaystyle\int_0^\pi e^x \sin(x)\,\mathrm{d}x = \left[-e^x \cos(x)\right]_0^\pi - \int_0^\pi -e^x \cos(x)\,\mathrm{d}x$
$= -e^\pi \cos(\pi) - \left(-e^0 \cos(0)\right) + \displaystyle\int_0^\pi e^x \cos(x)\,\mathrm{d}x$
$= e^\pi + 1 + J$

$\boxed{\text{Finalement, on a } I = -J \text{ et } I = e^\pi + 1 + J}$

b. En sommant les 2 égalités précédentes, on obtient :
$2I = e^{\pi} + 1$

D'où finalement $I = \dfrac{e^{\pi}+1}{2}$ et $J = -\dfrac{e^{\pi}+1}{2}$

Exercice 3 - hors spécialité

Partie A

1. Vérifions si i est solution de (E) :
$\mathrm{i}^3 - (4+\mathrm{i})\,\mathrm{i}^2 + (13+4\mathrm{i})\,\mathrm{i} - 13\mathrm{i} = -\mathrm{i} + 4 + \mathrm{i} + 13\mathrm{i} - 4 - 13\mathrm{i} = 0$

Donc i est solution de (E)

2. Développons :
$(z-\mathrm{i})\,(az^2+bz+c) = az^3 + (b - a\mathrm{i})\,z^2 + (c - ib)\,z - c\mathrm{i}$

Par identification, on obtient : $a = 1$, $b = -4$ et $c = 13$

Finalement $z^3 - (4+\mathrm{i})\,z^2 + (13+4\mathrm{i})\,z - 13\mathrm{i} = (z-\mathrm{i})\,(z^2 - 4z + 13)$

3. Nous pouvons utiliser le discriminant pour trouver les solutions de $z^2 - 4z + 13 = 0$
$\Delta = (-4)^2 - 4 \times 13 = 16 - 52 = -36$

Les solutions sont donc $z_2 = \dfrac{4+6\mathrm{i}}{2} = 2 + 3\mathrm{i}$ et $z_3 = 2 - 3\mathrm{i}$

Donc les solutions de (E) sont $z_1 = \mathrm{i}$, $z_2 = 2+3\mathrm{i}$ et $z_3 = 2 - 3\mathrm{i}$

Partie B

<u>Remarque :</u> comme souvent les points considérés dans cette partie correspondent aux solutions trouvées dans la partie précédente. Si tu n'as pas trouvé ces réponses, je te conseille de relire tes calculs !

1. On a la relation : $z_{\overrightarrow{BA'}} = e^{i\frac{\pi}{4}} z_{\overrightarrow{BA}}$

Or $z_{\overrightarrow{BA}} = z_A - z_B = \mathrm{i} - 2 - 3\mathrm{i} = -2\,(1+\mathrm{i})$
Et $e^{i\frac{\pi}{4}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\,(1+\mathrm{i})$

Donc $z_{\overrightarrow{BA'}} = e^{i\frac{\pi}{4}} z_{\overrightarrow{BA}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\,(1+\mathrm{i}) \times -2\,(1+\mathrm{i}) = -\sqrt{2}\,(1+2\mathrm{i}-1) = -2\sqrt{2}\mathrm{i}$

Donc $z_{A'} - z_B = z_{A'} - 2 - 3\mathrm{i} = -2\sqrt{2}\mathrm{i}$

Et finalement $z_{A'} = 2 + \left(3 - 2\sqrt{2}\right)\mathrm{i}$

2. A', B et C sont sur la droite d'équation $x = 2$ (la partie réelle de leurs affixes est égale à 2).

Donc A', B et C sont alignés

De plus, on connais les longueurs : $BC = 6$ et $BA' = 2\sqrt{2}$

Donc le rapport de l'homothétie est $h = \dfrac{2\sqrt{2}}{6} = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$

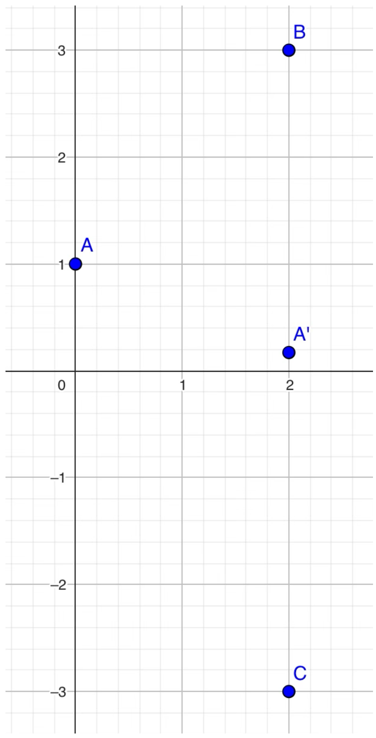
Soit M d'affixe z et son image M' d'affixe z'.

L'écriture complexe est donnée par $z' - z_B = h\left(z - z_B\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{3}\left(z - 2 + 3\mathrm{i}\right)$

Donc $z' = \dfrac{\sqrt{2}}{3}\left(z - 2 - 3\mathrm{i}\right) + 2 + 3\mathrm{i} = \dfrac{\sqrt{2}}{3}z + \left(1 - \dfrac{\sqrt{2}}{3}\right)\left(2 + 3\mathrm{i}\right)$

L'écriture complexe de l'homothétie est $z \mapsto \dfrac{\sqrt{2}}{3}z + \left(1 - \dfrac{\sqrt{2}}{3}\right)\left(2 + 3\mathrm{i}\right)$

La figure :



Exercice 3 - spécialité

1. Une similitude directe est caractérisée par un rapport k et un angle θ
Nous allons étudier le rapport $\dfrac{z_H - z_A}{z_C - z_A} = k e^{i\theta}$

Notons s_1 la similitude directe de centre A qui transforme C en H.

$$\frac{z_H - z_A}{z_C - z_A} = \frac{-5+5-6\mathrm{i}}{3-2\mathrm{i}+5-6\mathrm{i}} = \frac{-6\mathrm{i}}{8-8\mathrm{i}} = \frac{-6\mathrm{i}\left(1+\mathrm{i}\right)}{8\left(1-\mathrm{i}\right)\left(1+\mathrm{i}\right)} = \frac{3-3\mathrm{i}}{8} = \frac{3}{8}\left(1-\mathrm{i}\right)$$

$$\left|\frac{z_H - z_A}{z_C - z_A}\right| = \frac{3}{8}\left|1-\mathrm{i}\right| = \frac{3\sqrt{2}}{8}$$

$$\arg\left(\frac{z_H - z_A}{z_C - z_A}\right) = \arg\left(\frac{3}{8}\left(1-\mathrm{i}\right)\right) = \arg\left(1-\mathrm{i}\right) = -\frac{\pi}{4}\left[2\pi\right]$$

Finalement $\dfrac{z_H - z_A}{z_C - z_A} = \dfrac{3\sqrt{2}}{8}e^{-i\frac{\pi}{4}}$

Donc s_1 est la similitude de centre A, de rapport $k = \dfrac{3\sqrt{2}}{8}$ et d'angle $\theta = -\dfrac{\pi}{4}\left[2\pi\right]$

2.
a. Par définition de s on a la relation $z' = a\overline{z} + b$
Comme A et C sont invariants par s, on a les relations :
$z_A = a\overline{z_A} + b$ ou $-5+6\mathrm{i} = a\left(-5-6\mathrm{i}\right) + b$
Et $z_C = a\overline{z_C} + b$ ou $3-2\mathrm{i} = a\left(3+2\mathrm{i}\right) + b$

On doit donc résoudre le système : $\begin{cases} -5\left(a-1\right) - 6\left(a+1\right)\mathrm{i} + b = 0 \\ 3\left(a-1\right) + 2\left(a+1\right)\mathrm{i} + b = 0 \end{cases}$

En soustrayant la ligne 1 de la 2, on obtient :
$8\left(\left(a-1\right) + \left(a+1\right)\mathrm{i}\right) = 0$ ou $\left(a-1\right) + \left(a+1\right)\mathrm{i} = 0$
D'où $a\left(1+\mathrm{i}\right) - \left(1-\mathrm{i}\right) = 0$

Et $a = \dfrac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}} = \dfrac{\left(1-\mathrm{i}\right)^2}{\left(1+\mathrm{i}\right)\left(1-\mathrm{i}\right)} = \dfrac{-2\mathrm{i}}{2} = -\mathrm{i}$

Il vient alors $3\left(-\mathrm{i}-1\right) + 2\left(-\mathrm{i}+1\right)\mathrm{i} + b = -3\mathrm{i} - 3 + 2 + 2\mathrm{i} + b = -\mathrm{i} - 1 + b = 0$
Donc $b = 1 + \mathrm{i}$

Finalement, l'écriture complexe de s est $z' = -\mathrm{i}\overline{z} + 1 + \mathrm{i}$

On vérifie facilement que s n'est pas l'identité (avec $z = 0$ par exemple)

Et on conclut que s est la symétrie d'axe (AC)

b. $z_H = -5$
Donc $z_E = 5\mathrm{i} + 1 + \mathrm{i}$

$\boxed{\text{Finalement l'affixe de } E \text{ image de } H \text{ par } s \text{ est } z_E = 1 + 6\mathrm{i}}$

c. Déterminons r rayon de Γ en utilisant A par exemple :
$r = FA = \| -2 + \mathrm{i} + 5 - 6\mathrm{i}\| = \|3 - 5\mathrm{i}\| = \sqrt{34}$

De plus $FE = \| -2 + \mathrm{i} - 1 - 6\mathrm{i}\| = \| -3 - 5\mathrm{i}\| = \sqrt{34}$

$\boxed{\text{Donc } FE = FA \text{ et } E \in \Gamma}$

3. Par définition de G, $\overrightarrow{BG} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{BI}$

Or I est le milieu de $[AC]$, donc $z_I = \dfrac{z_A + z_C}{2} = \dfrac{-5 + 6\mathrm{i} + 3 - 2\mathrm{i}}{2} = \dfrac{-2 + 4\mathrm{i}}{2} = -1 + 2\mathrm{i}$

D'où $z_{\overrightarrow{BI}} = -1 + 2\mathrm{i} + 7 + 2\mathrm{i} = 6 + 4\mathrm{i}$

Et $z_{\overrightarrow{BG}} = \dfrac{2}{3}(6 + 4\mathrm{i}) = 4 + \dfrac{8}{3}\mathrm{i}$

$z_G + 7 + 2\mathrm{i} = 4 + \dfrac{8}{3}\mathrm{i}$

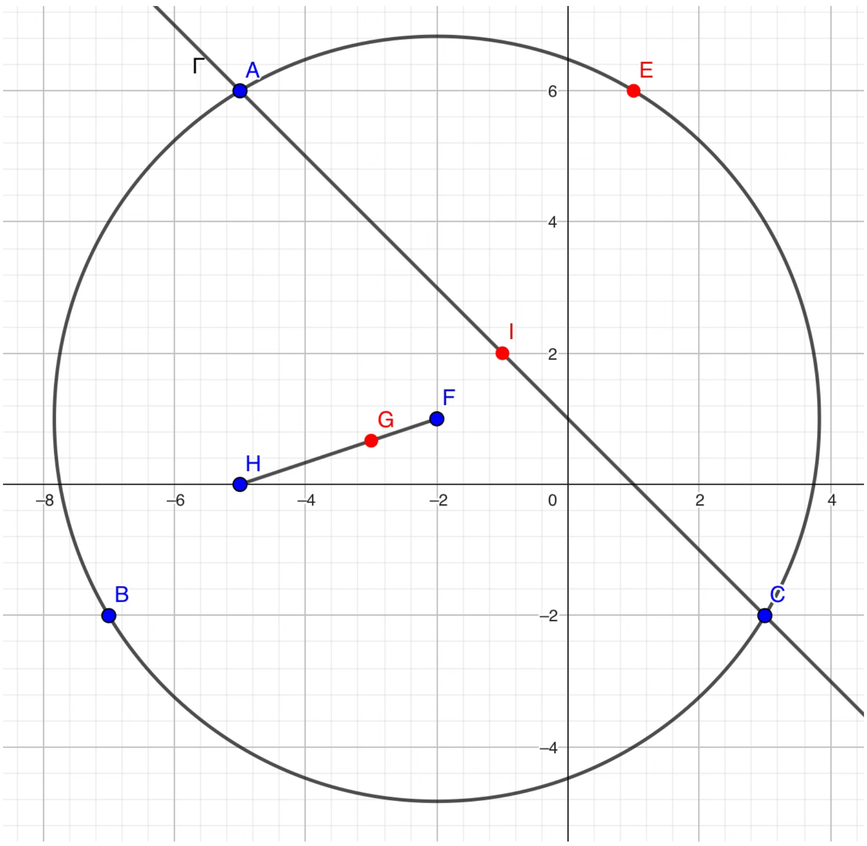
$\boxed{\text{Et donc } z_G = -3 + \dfrac{2}{3}\mathrm{i}}$

$z_{\overrightarrow{HF}} = -2 + \mathrm{i} + 5 = 3 + \mathrm{i}$

Et $z_{\overrightarrow{HI}} = -3 + \dfrac{2}{3}\mathrm{i} + 5 = 2 + \dfrac{2}{3}\mathrm{i} = \dfrac{2}{3} z_{\overrightarrow{HF}}$

$\boxed{\text{Donc } H, F \text{ et } I \text{ sont alignés.}}$

La figure :



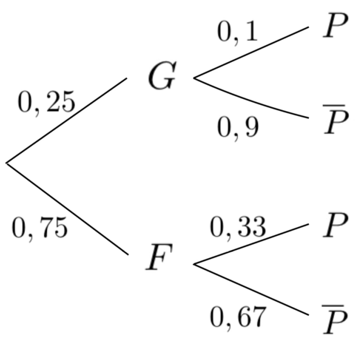
Exercice 4

1. Si le représentant vend 2 produits, il essuie également 3 échecs dans sa matinée. On peut appliquer la formule de la loi binômiale $\mathscr{B}\left(5;0{,}2\right)$

Donc $P\left(X=2\right)=\binom{5}{2}\times 0{,}2^2\times(1-0{,}2)^3=0{,}2048$

$\boxed{\text{Réponse d}}$

2. Dessinons un arbre de probabilités :



(On a évidemment $F=\overline{G}$)

On utiliser la formule des probabilités totales et :

$$\mathscr{P}(P)=\mathscr{P}(G\cap P)+\mathscr{P}(F\cap P)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{10}+\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{11}{40}=0{,}275$$

$\boxed{\text{Réponse b}}$

3. $\mathscr{P}_P(G)=\dfrac{\mathscr{P}(G\cap P)}{\mathscr{P}(P)}=\dfrac{\frac{1}{4}\times\frac{1}{10}}{\frac{11}{40}}=\dfrac{1}{11}\approx 0{,}091$

$\boxed{\text{Réponse b}}$

4. Notons z_1, z_2 et z_3 les 3 zones en partant du centre. Les aires sont considérées en cm^2.

$\mathscr{A}\left(z_1\right)=100\pi$
$\mathscr{A}\left(z_2\right)=400\pi-\mathscr{A}\left(z_1\right)=300\pi$
$\mathscr{A}\left(z_3\right)=900\pi-\mathscr{A}\left(z_1\right)-\mathscr{A}\left(z_2\right)=500\pi$
Et l'aire totale est $\mathscr{A}=900\pi$

La probabilité d'atteindre la zone extérieure est donnée par le rapport entre l'aire de z_3 et l'aire totale :

$$p=\frac{\mathscr{A}\left(z_3\right)}{\mathscr{A}}=\frac{500}{900}=\frac{5}{9}$$

$\boxed{\text{Réponse a}}$

Exercice 5

Partie A

1. f est définie pour $1 + x > 0$, donc $\left]-1, +\infty\right[$

Elle est bien dérivable sur son domaine de définition comme somme et quotient de fonctions qui le sont.

$$\forall x \in \left]-1, +\infty\right[,\ f'(x) = 1 - \frac{\frac{1}{1+x} \times (1+x) - \ln(1+x)}{(1+x)^2} = 1 - \frac{1 - \ln(1+x)}{(1+x)^2}$$

$$\boxed{\text{Donc } \forall x \in \left]-1, +\infty\right[, f'(x) = \frac{(1+x)^2 - 1 + \ln(1+x)}{(1+x)^2}}$$

2. $\forall x \in \left]-1, +\infty\right[,\ N(x) = (1+x)^2 - 1 + \ln(1+x)$
N est dérivable sur $\left]-1, +\infty\right[$ comme somme de fonctions qui le sont et

$$\forall x \in \left]-1, +\infty\right[,\ N'(x) = 2(1+x) + \frac{1}{1+x} > 0$$

Donc N est strictement croissante.

Et $N(0) = 0$

Comme f' est du signe de N

$\boxed{f \text{ est décroissante sur } \left]-1,0\right] \text{ puis croissante sur } \left[0, +\infty\right[}$

3. Le point d'intersection de $\mathscr{D}$ et $\mathscr{C}$ vérifie :
$f(x) = x$ ou $x - \dfrac{\ln(1+x)}{1+x} = x$

x doit donc vérifier $\dfrac{\ln(1+x)}{1+x} = 0$ donc $\ln(1+x) = 0$

$\boxed{\text{Donc le point d'intersection de } \mathscr{D} \text{ et } \mathscr{C} \text{ est } O(0,0)}$

Partie B

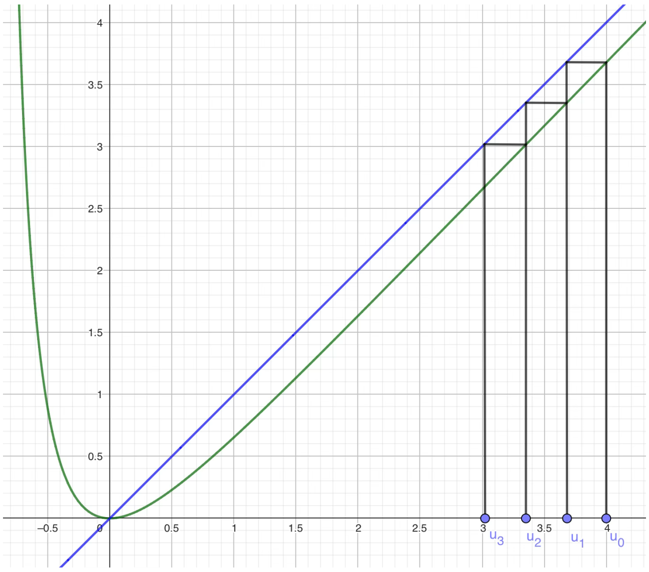
1. On a vu dans la partie A que f est strictement croissante sur $[0,4]$

De plus $f(0) = 0$ et $f(4) = 4 - \dfrac{\ln(5)}{5} \approx 3{,}68 < 4$

$\boxed{\text{Donc } \forall x \in [0,4],\ f(x) \in [0,4]}$

2.
a. Cf graphique

©antoine.remond.maths@gmail.com



b. Nous allons montrer par récurrence, en utiliser la question 1 la proposition $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in [0,4]$
$u_0 = 4 \in [0,4]$
Ce qui permet d'initialiser la proposition.

Supposons maintenant la proposition vraie au rang n et étudions le rang $n+1$:
$u_{n+1} = f(u_n)$ et comme $u_n \in [0,4]$, $f(u_n) \in [0,4]$ d'après la question 1 et donc $u_{n+1} \in [0,4]$
Ce qui confirme l'hérédité de la proposition.

Ainsi, on peut conclure que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in [0,4]$

c. Étudions la monotonie de (u_n) en considérant $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = u_n - \frac{\ln(1+u_n)}{1+u_n} - u_n = -\frac{\ln(1+u_n)}{1+u_n} < 0$$

Et donc la suite (u_n) est décroissante.

d. (u_n) est décroissante et minorée par 0

Donc (u_n) est convergente.

e. Si une suite définie par récurrence converge, elle converge vers un point fixe de la fonction qui la définit.
Or, le seul point fixe de f est 0.

Donc (u_n) converge vers $l = 0$.