Baccalauréat spé math 2024 - sujet 0

Exercice 1

Partie 1

1. u est définie par $\forall x \in \mathbb{R},\ u(x) = xe^{-x}$
u est bien définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ u'(x) = e^{-x} - xe^{-x}$

On a donc $\forall x \in \mathbb{R},\ u'(x) + u(x) = e^{-x} - xe^{-x} + xe^{-x} = e^{-x}$

Ce qui confirme que u est bien une solution de (E)

2. On peut écrire l'équation sous la forme $(E') : y' = -y$

Rappel : *Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay,\ a \in \mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto Ce^{ax},\ C \in \mathbb{R}$*

En utilisant le rappel de cours ci-dessus, on trouve que :

Les solutions de (E') sont les fonctions $x \mapsto Ce^{-x},\ C \in \mathbb{R}$

3. On va utiliser les 2 résultats précédents pour déduire l'ensemble des résultats de (E)

Rappel : *les solutions d'une équation différentielle avec second membre sont composées de la somme d'une solution de l'équation homogène associée (second membre nul, question 2) et d'une solution particulière de l'équation (question 1). (Je ne reprends pas le cours en détail ici, n'hésite pas à te référer à ton cours ou aux nombreuses ressources en ligne disponible !)*

Les solutions de (E) sont les fonctions $x \mapsto xe^{-x} + Ce^{-x} = (x + C)e^{-x},\ C \in \mathbb{R}$

N'hésitons pas à vérifier !
En notant f_c la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R},\ f_c(x) = xe^{-x} + Ce^{-x}$, on a
$\forall x \in \mathbb{R}, f_c'(x) = e^{-x} - xe^{-x} - Ce^{-x}$

Ce qui nous donne bien $\forall x \in \mathbb{R}, f_c'(x) + f_c(x) = e^{-x} - xe^{-x} - Ce^{-x} + xe^{-x} + Ce^{-x} = e^{-x}$

4. On sait donc que g va être de la forme $g(x) = xe^{-x} + Ce^{-x}$

Cela donne $g(0) = C$
Or par hypothèse $g(0) = 2$

Et donc g est définie par $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = (x + 2)e^{-x}$

Partie 2

1. On peut s'appuyer sur 2 points clé de la fonction h :
   - $\forall x \in \mathbb{R},\ e^{x} > 0$ (donc évidemment e^{-x} également)
   - h est strictement décroissante (je te laisse vérifier si besoin en la dérivant)

On peut donc conclure que C est la courbe en trait plein.

2. On va identifier la courbe C_k en utilisant la valeur prise par la fonction f_k en 0

On trouve que $f_k(0) = k$

On sait par ailleurs que $h(0) = 1$

Or, d'après la représentation graphique, C_k passe par le point $(0; 2)$.

On déduit donc que $k = 2$

Exercice 2

Partie 1

1.
a. On considère F_1 définie par $\forall x \in [0; 1],\ F_1(x) = (x-1)e^x$
F_1 est bien dérivable sur $[0; 1]$ (et sur $\mathbb{R}$ d'ailleurs) comme produit de fonctions qui le sont et
$F_1'(x) = e^x + (x-1)e^x = xe^x = f_1(x)$

Cela confirme que F_1 est une primitive de f_1

b. Nous allons utiliser le résultat précédent :
$$I_1 = \int_0^1 xe^x \mathrm{d}x = \int_0^1 f_1(x)\,\mathrm{d}x = \left[F_1(x)\right]_0^1 = \left[(x-1)e^x\right]_0^1 = 0 - (-1)$$

Et donc $I_1 = 1$

2. On considère $n \geqslant 1$
$$I_{n+1} = \int_0^1 x^{n+1}e^x \mathrm{d}x$$

Procédons à une intégration par parties comme suggéré par l'énoncé

$$I_{n+1} = \int_0^1 x^{n+1}e^x \mathrm{d}x = \left[x^{n+1}e^x\right]_0^1 - \int_0^1 (n+1)x^n e^x \mathrm{d}x = e - (n+1)\int_0^1 x^n e^x \mathrm{d}x$$

Et finalement, on a bien $I_{n+1} = e - (n+1)I_n$

3. Utilisons les résultats des 2 questions précédentes pour trouver $I_2 = e - 2I_1$

Et donc $I_2 = e - 2$

4. On reconnaît dans la boucle for la relation permettant de calculer I_{n+1} en fonction de I_n et l'initialisation avec 1 qui est bien la valeur de I_1.
On note de plus qu'on initialise une liste dans laquelle on vient ajouter le dernier résultat calculé dans chaque boucle.

Donc mystere(5) retourne une liste avec les valeurs de I_1 à I_5.

Partie 2

1.
a. I_n correspond à l'air entre l'axe des abscisses et la courbe sur l'intervalle $[0;1]$

b. D'après les courbes représentées, on peut conjecturer que (I_n) va tendre vers 0.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in [0;1]$, on a $f_n(x) \geqslant 0$
On peut donc en conclure que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ I_n \geqslant 0$

Pour l'autre l'inégalité, on remarque que $\forall x \in [0;1],\ e^x \leqslant e$.
On peut donc écrire $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n e^x \mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 x^n e \mathrm{d}x = e\int_0^1 x^n \mathrm{d}x$

$$\boxed{\text{Et on conclut } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant I_n \leqslant e\int_0^1 x^n \mathrm{d}x}$$

3. Nous pouvons calculer facilement le membre à droite de l'inégalité :

$$e\int_0^1 x^n \mathrm{d}x = e\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{e}{n+1}$$

On peut donc réécrire l'inégalité : $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{e}{n+1}$

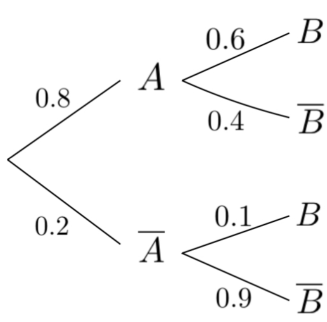
Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{e}{n+1} = 0$, on peut appliquer le théorème des gendarmes.

$$\boxed{\text{On conclut donc que } \lim_{n\to+\infty} I_n = 0}$$

Exercice 3

Partie 1

1. En prenant en compte les probabilités données et en calculant celles des événements contraires, on trouve :



2. On lit sur l'arbre la probabilité de répondre correctement aux 2 questions (donc de répondre correctement à la question 1, puis correctement à la question 2) que nous noterons $P(A \cap B)$:
$P(A \cap B) = 0.8 \times 0.6 = 0.48$

La probabilité qu'un candidat réponde correctement à Q1 et Q2 est de 48%

3. Pour calculer la probabilité $P(B)$, nous utilisons la formule des probabilités totales :
$P(B) = P(A \cap B) + P\left(\overline{A} \cap B\right) = 0.48 + 0.2 \times 0.1 = 0.48 + 0.02 = 0.5$

La probabilité qu'un candidat réponde correctement à la question Q2 est de 50%.

4. Il n'y a que 2 résultats possible, 1 point en cas de bonne réponse ou 0 pour les autres cas.
En écrivant la formule pour le premier calcul : $E\left(X_1\right) = 0.8 \times 1 + 0.2 \times 0 = 0.8$

<u>Rappel :</u> Pour une loi X qui à une valeur x_i associe une probabilité p_i, pour i entier entre 1 et n.

formule de l'espérance : $E(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$

formule de la variance : $V(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i \left(x_i - E(X)\right)^2$

On trouve de la même façon : $E\left(X_2\right) = 0.5$

Et on déduit : $E(X) = 1.3$

On conclut donc $E\left(X_1\right) = 0.8$, $E\left(X_2\right) = 0.5$ et $E(X) = 1.3$

L'espérance de X correspond à la note moyenne des candidats pour les 2 questions considérées.

5.
a. $X = 0$ correspond à 2 mauvaises réponses.
On a donc : $P(X = 0) = P\left(\overline{A}\right) \times P\left(\overline{B}\right) = 0.2 \times 0.9 = 0.18$

$P(X = 0) = 0.18$

$X = 2$ correspond à l'inverse à 2 bonnes réponses.
D'où $P(X = 2) = P(A) \times P(B) = 0.8 \times 0.6 = 0.48$

$P(X = 2) = 0.48$

On a $P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = 1$
D'où $P(X = 1) = 1 - P(X = 0) - P(X = 2)$

Et donc $P(X = 1) = 1 - 0.18 - 0.48 = 0.34$

<u>Remarque :</u> on peut vérifier ce résultat en calculant directement
$P(X = 1) = P\left(A \cap \overline{B}\right) + P\left(\overline{A} \cap B\right) = 0.8 \times 0.4 + 0.2 \times 0.1 = 0.34$

b. Calculons d'abord l'espérance de X.
$E(X) = 0 \times 0.18 + 1 \times 0.34 + 2 \times 0.48 = 1.3$

<u>Remarque :</u> boulette de ma part, j'ai oublié qu'on l'avait en fait calculée juste avant ! Je laisse le calcul, on ne s'exerce jamais trop sur ces chapitres probabilités et statistiques !

On peut donc calculer la variance, avec la formule rappelée :
$V(X) = 0.18\,(0-1.3)^2 + 0.34\,(1-1.3)^2 + 0.48\,(2-1.3)^2 = 0.57$

On confirme bien que la variance de X vaut 0.57

c. On va calculer les variances de X_1 et X_2 :
$V\left(X_1\right) = 0.8\,(1-0.8)^2 + 0.2\,(0-0.8)^2 = 0.16$
Et $V\left(X_2\right) = 0.5\,\left(1-0.5\right)^2 + 0.5\,\left(1-0.5\right)^2 = 0.25$

On a $V(X) \neq V\left(X_1\right) + V\left(X_2\right)$. Ce résultat n'est pas surprenant car les 2 lois ne sont pas indépendantes (les événements Q_1 et Q_2 ne le sont pas).

Partie 2

1. Les réponses aux questions suivent une loi de Bernoulli de paramètre $p = \dfrac{3}{4}$

De plus, la réponse à chaque question est considérée comme indépendante des autres.

Cela confirme que Y est une loi binomiale de paramètres $p = \dfrac{3}{4}$ et $n = 8$.

2. Y étant une loi binomiale,

On déduit $P(Y=8) = \left(\dfrac{3}{4}\right)^8 = \dfrac{6561}{65536}$

3. On va utiliser les formules du cours sur les lois binomiales

<u>Rappel :</u> pour une loi binomiale X de paramètres p et n, on a :
Espérance : $E(X) = np$
Variance : $V(X) = np\left(1-p\right)$

Ainsi $E(Y) = 8 \times \dfrac{3}{4} = 6$ et $V(Y) = 8 \times \dfrac{3}{4} \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{2}$

Partie 3

1. L'espérance étant linéaire, on a $E(Z) = E(X) + E(Y)$

Avec les résultats précédents, on obtient $E(Z) = 1.3 + 6 = 7.3$

Comme X et Y sont indépendantes, on a également $V(Z) = V(X) + V(Y)$

Ce qui nous donne $V(Z) = 0.57 + 1.5 = 2.07$

2.
a. On utilise une nouvelle fois la linéarité de l'espérance et

$$E\left(M_n\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E\left(Z_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(Z) = E(Z)$$

$\boxed{\text{Et donc } E\left(M_n\right) = 7.3}$

b. Pour trouver l'écart-type de M_n, il faut d'abord calculer la variance.
<u>Rappel :</u> pour un variable aléatoire X, on a $V\left(aX + b\right) = a^2 V(X)$, pour a et b 2 réels.

On a donc
$$V\left(M_n\right) = V\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i\right) = \frac{1}{n^2} V\left(\sum_{i=1}^{n} Z_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} V\left(Z_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} V(Z) = \frac{V(Z)}{n} = \frac{2.07}{n}$$

Finalement, l'écart-type vaut donc $\sigma\left(M_n\right) = \sqrt{V\left(M_n\right)} = \sqrt{\frac{2.07}{n}}$

On cherche n tel que $\sigma\left(M_n\right) \leqslant 0.5$ et donc $\sqrt{\frac{2.07}{n}} \leqslant 0.5$

Cette inégalité est équivalente à $\frac{2.07}{n} \leqslant 0.25$

Ce qui implique $0.25n \geqslant 2.07$ et finalement $n \geqslant \frac{2.07}{0.25}$

Comme $\frac{2.07}{0.25} = 8.28$,

$\boxed{\text{On conclut que la variance de } M_n \text{ est inférieure à } 0.5 \text{ pour } n \geqslant 9}$

c. Remarquons déjà que $6.3 \leqslant M_n \leqslant 8.3$ peut se réécrire $7.3 - 1 \leqslant M_n \leqslant 7.3 + 1$
En utilisant le résultat du a., on écrit encore $E\left(M_n\right) - 1 \leqslant M_n \leqslant E\left(M_n\right) + 1$
Ce qui donne $-1 \leqslant M_n - E\left(M_n\right) \leqslant 1$

Et finalement $\left|M_n - E\left(M_n\right)\right| \leqslant 1$

Ainsi, $P\left(6.3 \leqslant M_n \leqslant 8.3\right) = P\left(\left|M_n - E\left(M_n\right)\right| \leqslant 1\right)$
De plus $P\left(\left|M_n - E\left(M_n\right)\right| \leqslant 1\right) = 1 - P\left(\left|M_n - E\left(M_n\right)\right| > 1\right)$

On peut appliquer l'inégalité de Bienaimé Tchebychev sur cette dernière expression.

<u>Rappel :</u> inégalité de Bienaimé Tchebychev. Pour une variable aléatoire X et un réel strictement positif δ, on a $P\left(\left|X - E(X)\right| \geqslant \delta\right) \leqslant \frac{V(X)}{\delta^2}$

Ce qui nous donne $P\left(\left|M_n - E\left(M_n\right)\right| > 1\right) \leqslant \frac{V\left(M_n\right)}{1^2} = V\left(M_n\right)$

On sait de plus que $n \geqslant 9$, donc $V\left(M_n\right) \leqslant \frac{2.07}{9} = 0.23$

Finalement, $P\left(\left|M_n - E\left(M_n\right)\right| \leqslant 1\right) = 1 - P\left(\left|M_n - E\left(M_n\right)\right| > 1\right) \geqslant 0.77$

$\boxed{\text{Ce qui permet bien de conclure que } P\left(6.3 \leqslant M_n \leqslant 8.3\right) \geqslant 0.75 \text{ si } n \geqslant 9.}$

Exercice 4

1. Commençons par exhiber 2 vecteurs du plan (ABG), par exemple $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{i}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BG}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$

Nous allons calculer le produit scalaire de ces vecteurs avec les vecteurs proposés.

Rappel : le produit scalaire de 2 vecteurs $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$ est donné par $\overrightarrow{u}\,.\,\overrightarrow{v} = xx' + yy' + zz'$

À la vue des coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BG}$ on note que les propositions contenant uniquement des coordonnées positives ne pourront pas donner 2 produits scalaires nuls, ce qui élimine a. et d. (D'ailleurs, le vecteur de la réponse a correspond à $\overrightarrow{AG}$, qui est donc contenu dans le plan).

Étudions la réponse c :

$\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{n} = 1 \times 0 - 0 \times 1 + 0 \times 1 = 0$

$\overrightarrow{BG}\,.\,\overrightarrow{n} = 0 \times 0 - 1 \times 1 + 1 \times 1 = 0$

La bonne réponse est donc la réponse c.

Remarque : n'hésite pas à vérifier les autres réponses pour t'entraîner à manipuler les produits scalaires !

2. Par définition des points I et J, on peut appliquer la réciproque du théorème de Thales dans le triangle AEF, ce qui nous donne $\overrightarrow{IJ} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AF}$.

De plus, $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{DG}$ et donc $\overrightarrow{IJ} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{DG}$.

Ainsi $(IJ)//(DG)$, réponse a.

3. Pour une base de l'espace, il faut 3 vecteurs non coplanaires (ie. on peut écrire un vecteur comme combinaison linéaire des 2 autres).

La réponse a ne contient que 2 vecteurs et ne peut donc pas correspondre.

$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires, par construction (sinon, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$).
Pareillement, on a $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CG}$
Donc, les réponses b et d ne sont pas correctes.

Par contre, les vecteurs $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{DG}$ sont bien non coplanaires.

La bonne réponse est la réponse c.

4. On peut écrire (avec des vecteurs orthogonaux, n'hésite pas à le vérifier si besoin !) :

$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG}$

Or $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AJ}$

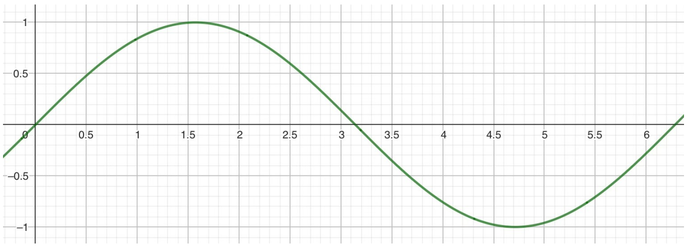
Donc $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AJ}$, réponse b.

5. Le prisme est composé d'un cube d'arête de longueur 1 et d'une moitié d'un cube identique.

Le volume est donc $\dfrac{3}{2}$, réponse c.

Exercice 5

1. Sur $[0; 2\pi]$, la représentation graphique de la fonction sinus est :



Pour une valeur de $[-1; 1]$, sauf $0, \ -1$ et 1, la fonction va prendre 2 fois cette valeur.

Donc $\sin(x) = 0.1$ admet 2 solution sur $[0; 2\pi]$, réponse c.

2. f est 2 fois dérivable sur $[0; \pi]$ (comme somme de 2 fonctions qui le sont, pas besoin de l'admettre) :
$\forall x \in [0; \pi], \ f'(x) = 1 + \cos(x)$
Et $\forall x \in [0; \pi], \ f''(x) = -\sin(x) \leqslant 0$

Remarque : la dérivée seconde de la fonction sinus s'annule en 0 et π et changerait de signe si on l'étudiait sur un intervalle plus large. Comme la question se limite à la fonction sur $[0; \pi]$, les réponses concernant les points d'inflexion potentiels ne sont pas correctes.

Ainsi, la fonction est concave sur $[0; \pi]$, réponse b.

3. L'expérience consiste à tirer une boule parmi 50, puis une parmi 49 et enfin une parmi 48 (le tirage étant sans remise). Le nombre de tirages possible est $50 \times 49 \times 48$

Les réponses a et b ne peuvent donc pas correspondre.

De plus, on ne tient pas compte de l'ordre de tirage donc on considère que les tirages $(1; 2; 3), \ (1; 3; 2), \ (2; 1; 3), \ (2; 3; 1), \ (3; 1; 2)$ et $(3; 2; 1)$ sont équivalents. Ce qui représente 6 possibilités pour chaque triplet de nombre.

Finalement, le nombre de tirages sans ordre est $\dfrac{50 \times 49 \times 48}{1 \times 2 \times 3}$, réponse d.

Remarque : c'est évidemment la définition de la combinaison.

4. Cette fois, chaque expérience a 2 résultats possibles et il n'y a pas de corrélation entre les différentes expérience.

Il y a donc 2^{10} résultats possibles, réponse b.

5. On peut découper le résultat d' « obtenir au plus 2 piles » en « obtenir que des faces », « obtenir 1 pile » et « obtenir 2 piles ».

La probabilité est donc $\left(\dfrac{1}{2}\right)^n + n\left(\dfrac{1}{2}\right)^n + \dfrac{n(n-1)}{2}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n = \left(1 + n + \dfrac{n(n-1)}{2}\right)\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

La bonne réponse est donc la réponse d.

Exercice 6

On considère (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1 + 2u_n}$

Calculons les premiers termes de (u_n) :

$$u_1 = \frac{u_0}{1 + 2u_0} = \frac{1}{1+3} = \frac{1}{3}$$

$$u_2 = \frac{u_1}{1 + 2u_1} = \frac{\frac{1}{3}}{1 + \frac{2}{3}} = \frac{1}{5}$$

$$u_3 = \frac{u_2}{1 + 2u_2} = \frac{\frac{1}{5}}{1 + \frac{2}{5}} = \frac{1}{7}$$

$$u_4 = \frac{u_3}{1 + 2u_3} = \frac{\frac{1}{7}}{1 + \frac{2}{7}} = \frac{1}{9}$$

Donc l'affirmation 1, $u_4 = \dfrac{1}{9}$, est vraie.

Procédons par récurrence pour vérifier l'affirmation 2 :

Initialisation :

Les premiers termes confirment bien l'affirmation que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{1}{2n+1}$.

Hérédité :

Supposons la propriété vraie pour $n \in \mathbb{N}$ et étudions le rang $n+1$

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{1 + 2u_n} = \frac{\frac{1}{2n+1}}{1 + \frac{2}{2n+1}} = \frac{\frac{1}{2n+1}}{\frac{2n+1+2}{2n+1}} = \frac{1}{2n+3} = \frac{1}{(2n+1)+2}$$

Ce qui confirme l'hérédité de la propriété.

On conclut que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{1}{2n+1}$ et que l'affirmation 2 est vraie.

L'expression donnée pour u_n nous permet de conclure que (u_n) tend vers 0 et qu'elle ne peut donc pas être minorée par un nombre strictement positif, aussi petit soit-il.

Ainsi, l'affirmation 3 est fausse.

Exercice 7

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ f_{0.5}(x) = x + 0.5e^{-x}$

a. $f_{0.5}$ est bien dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables et :

$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f'_{0.5}(x) = 1 - 0.5e^{-x}}$

b. On sait que $x \mapsto e^{-x}$ est une fonction strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ avec comme limites $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$

On en déduit que $f'_{0.5}$ est strictement croissante avec $\lim\limits_{x\to-\infty} f'_{0.5}(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f'_{0.5}(x) = 1$

<u>Remarque :</u> je n'insiste pas, il n'y a pas de forme indéterminée ou de difficulté particulière. Je te laisse détailler les étapes de calcul si besoin.

$f'_{0.5}$ va donc être négative, jusqu'à une valeur où elle s'annule, puis positive.

<u>Remarque :</u> on note que la réponse est donnée juste en dessous…

Cherchons donc la valeur qui annule $f'_{0.5}$:
$f'_{0.5}(x) = 1 - 0.5e^{-x} = 0 \Leftrightarrow 0.5e^{-x} = 1$

Ce qui donne $e^{-x} = 2$ ou encore $x = -\ln(2) = \ln\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

$\boxed{\text{Ainsi, on conclut que } f_{0.5} \text{ admet un minimum pour } x = \ln\left(\frac{1}{2}\right)}$

2. Soit k un réel strictement positif.

$f_k(\ln k) = \ln k + ke^{-\ln k} = \ln k + k \times \dfrac{1}{k}$

$\boxed{\text{Et donc } f_k(\ln k) = \ln k + 1}$

3. D'après la question précédente, pour tout $k > 0, f_k(\ln k)$ appartient à la droite d'équation $y = x + 1$

$\boxed{\text{Et donc tous les points } A_k \text{ sont alignés et l'affirmation est vraie.}}$

Exercice 8

1. La fonction `calcul` retourne le terme u_n. On reconnaît l'initialisation par la valeur de u_0 et le calcul des u_i jusqu'au rang n dans la boucle `for`.

La fonction `liste` quant à elle crée une liste dans laquelle on vient insérer les valeurs successives de (u_n).

On calcul rapidement que les premières valeurs de (u_n) sont bien $0,\ 1,\ 4,\ 13,\ 40$ et 121.

$\boxed{\text{Cela confirme que l'affirmation est fausse.}}$

2. Raisonnons par récurrence pour vérifier la proposition $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{3^n}{2} - \dfrac{1}{2}$

<u>Initialisation :</u>

$u_0 = \dfrac{3^0}{2} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2} = 0$, qui est bien la valeur donnée par l'énoncé.

<u>Hérédité :</u>

Supposons qu'au rang n, $u_n = \dfrac{3^n}{2} - \dfrac{1}{2}$ et étudions le rang $n+1$

$$u_{n+1} = 3u_n + 1 = 3\left(\frac{3^n}{2} - \frac{1}{2}\right) + 1 = \frac{3^{n+1}}{2} - \frac{3}{2} + 1 = \frac{3^{n+1}}{2} - \frac{1}{2}$$

Ce qui confirme l'hérédité de la proposition.

$\boxed{\text{On conclut donc que } \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{3^n}{2} - \dfrac{1}{2}}$

3. En reprenant le résultat précédent :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n = \frac{3^{n+1}}{2} - \frac{1}{2} - \frac{3^n}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3^{n+1}}{2} - \frac{3^n}{2} = 3^n\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\right) = 3^n$$

<u>Attention :</u> cette forme pourrait laisser penser que la proposition est vraie, mais pour $n = 0$,
$u_1 - u_0 = 3^0 = 1$, qui n'est évidemment pas un multiple de 3 !
On pouvait également le voir directement avec les valeurs numériques calculées plus haut.

$\boxed{\text{Finalement, la proposition est fausse.}}$