Exercice 35

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $\dfrac{-4x-6}{3} - \dfrac{-4x-2}{6} = \dfrac{-7x-5}{2}$
2. $\dfrac{-3x+6}{8} - \dfrac{x+10}{3} = \dfrac{-5x+10}{4}$
3. $\dfrac{x+3}{2} - \dfrac{4x-3}{3} = 1 - \dfrac{5x-12}{6}$
4. $\left(2x+5\right)^2 - 2(7x+4) = 4(x+3)^2 - 1$
5. $(2x+1)^2 - 3\left(x^2-1\right) = (x+3)^2 - 5x + 4$
6. $\dfrac{4}{x+2} + \dfrac{1}{x-2} = \dfrac{5x-6}{x^2-4}$

Solution :

1. $\dfrac{-4x-6}{3} - \dfrac{-4x-2}{6} = \dfrac{-7x-5}{2} \Rightarrow \dfrac{-8x-12}{6} - \dfrac{-4x-2}{6} = \dfrac{-21x-15}{6}$

On multiplie les 2 membres par -6 pour obtenir une équation équivalente. On va utiliser ce principe plusieurs fois dans l'exercice pour simplifier l'écriture, je ne le noterai pas systématiquement.

<u>Rappel :</u> 2 équations sont équivalentes si elles ont le même ensemble de solutions. En multipliant 2 membres d'une équation (égalité) par une même quantité non nulle, on obtient une équation équivalente.

$8x + 12 - (4x+2) = 21x + 15$
$8x + 12 - 4x - 2 = 21x + 15$
$4x + 10 = 21x + 15$
$10 - 15 = 21x - 4x$
$17x = -5$
$x = -\dfrac{5}{17}$

$\boxed{\text{Et donc } \mathcal{S} = \left\{-\dfrac{5}{17}\right\}}$

2. $\dfrac{-3x+6}{8} - \dfrac{x+10}{3} = \dfrac{-5x+10}{4} \Rightarrow \dfrac{-9x+18}{24} - \dfrac{8x+80}{24} = \dfrac{-30x+60}{24}$

$-9x + 18 - 8x - 80 = -30x + 60$
$-17x - 62 = -30x + 60$
$-17x + 30x = 60 + 62$
$13x = 122$

$\boxed{\text{Donc } \mathcal{S} = \left\{\dfrac{122}{13}\right\}}$

3. $\dfrac{x+3}{2} - \dfrac{4x-3}{3} = 1 - \dfrac{5x-12}{6} \Rightarrow \dfrac{3(x+3)}{6} - \dfrac{2(4x-3)}{6} = \dfrac{6-5x+12}{6}$

On peut donc multiplier cette équation par 6 et obtenir :
$3x + 9 - 8x + 6 = -5x + 18$
$-5x + 15 = -5x + 18$
Ce qui implique $15 = 18$!

Ainsi $\mathscr{S} = \varnothing$

4. $(2x+5)^2 - 2(7x+4) = 4(x+3)^2 - 1$
$\Rightarrow 4x^2 + 20x + 25 - 14x - 8 = 4\left(x^2 + 6x + 9\right) - 1$
$4x^2 + 6x + 17 = 4x^2 + 24x + 35$
$18x = -18$

Donc $\mathscr{S} = \{-1\}$

5. $(2x+1)^2 - 3\left(x^2 - 1\right) = (x+3)^2 - 5x + 4$
$4x^2 + 4x + 1 - 3x^2 + 3 = x^2 + 6x + 9 - 5x + 4$
$x^2 + 4x + 4 = x^2 + x + 13$
$3x = 9$

Donc $\mathscr{S} = \{3\}$

6. $\dfrac{4}{x+2} + \dfrac{1}{x-2} = \dfrac{5x-6}{x^2-4}$ implique $x \neq 2$ et $x \neq -2$

$\dfrac{4(x-2)}{x^2-4} + \dfrac{x+2}{x^2-4} = \dfrac{5x-6}{x^2-4} \Rightarrow 4x - 8 + x + 2 = 5x - 6$

$5x - 6 = 5x - 6$

Compte-tenu des valeurs interdites par l'énoncé

On obtient $\mathscr{S} = \mathbb{R} \backslash \{-2; 2\}$

Exercice 36

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes (se ramener à une équation produit)

1. $(3x+1)(5x-3) = 0$
2. $(3-x)(4-x)(10-x) = 0$
3. $\left(x + \dfrac{1}{3}\right)^2 = 4\left(x - \dfrac{1}{3}\right)^2$
4. $-x(5-x) + 3(x-5)^2 = x^2 - 25$
5. $x(x+1)(x+2) = (x+1)(x+2)(x+3)$
6. $2x\left(x^2+2\right) = x^2\left(x^2+2\right)$

Solution :

<u>Rappel :</u> un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un au moins de ses facteurs est nul.

1. $(3x+1)(5x-3) = 0 \Rightarrow 3x + 1 = 0$ ou $5x - 3 = 0$

Ce qui donne $\mathscr{S} = \left\{-\dfrac{1}{3}; \dfrac{3}{5}\right\}$

2. $(3-x)(4-x)(10-x) = 0 \Rightarrow 3 - x = 0$ ou $4 - x = 0$ ou $10 - x = 0$

Donc $\mathscr{S} = \{3; 4; 10\}$

3. $\left(x+\frac{1}{3}\right)^2=4\left(x-\frac{1}{3}\right)^2$

$\left(x+\frac{1}{3}\right)^2-4\left(x-\frac{1}{3}\right)^2=0$
$\left(x+\frac{1}{3}-2\left(x-\frac{1}{3}\right)\right)\left(x+\frac{1}{3}+2\left(x-\frac{1}{3}\right)\right)=0$
$(-x+1)\left(3x-\frac{1}{3}\right)=0$

Donc $\mathcal{S}=\left\{1;\frac{1}{9}\right\}$

4. $-x\left(5-x\right)+3\left(x-5\right)^2=x^2-25$
$-x\left(5-x\right)+3\left(x-5\right)^2=\left(x-5\right)\left(x+5\right)$
$-x\left(5-x\right)+3\left(x-5\right)^2-\left(x-5\right)\left(x+5\right)=0$
$\left(x-5\right)\left(x+3x-15-x-5\right)=0$
$\left(x-5\right)(3x-20)=0$

Donc $\mathcal{S}=\left\{5;\frac{20}{3}\right\}$

5. $x(x+1)(x+2)=(x+1)(x+2)(x+3)$
$x(x+1)(x+2)-(x+1)(x+2)(x+3)=0$
$(x+1)(x+2)(x-x-3)=0$
$-3(x+1)(x+2)=0$

Donc $\mathcal{S}=\{-2;-1\}$

6. $x^2\left(x^2+2\right)-2x\left(x^2+2\right)=0$
$x\left(x^2+2\right)(x-2)=0$

$x^2=-2$ n'ayant pas de solution,

On trouve $\mathcal{S}=\{0;2\}$

Exercice 37

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations
1. $3x^2-1=0$
2. $0{,}04x^2=1$
3. $7x^2=\frac{1}{15}$
4. $(x+1)^2+(x-1)^2=6$

Solution :

1. $3x^2-1=0\Rightarrow x^2=\frac{1}{3}$

Ce qui donne les solutions $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ou $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

<u>Remarque :</u> on préfère ne pas avoir de fractions au dénominateur. On écrira donc plutôt la forme proposée ci-dessous.

Ainsi $\boxed{\mathcal{S} = \left\{-\frac{\sqrt{3}}{3};\frac{\sqrt{3}}{3}\right\}}$

2. $0{,}04x^2 = 1 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{0{,}04} = 25$

Donc $\boxed{\mathcal{S} = \{-5;5\}}$

3. $7x^2 = \frac{1}{15} \Rightarrow x^2 = \frac{1}{105}$

Donc $\boxed{\mathcal{S} = \left\{-\frac{\sqrt{105}}{105};\frac{\sqrt{105}}{105}\right\}}$

4. $(x+1)^2 + (x-1)^2 = 6$
$x^2 + 2x + 1 + x^2 - 2x + 1 = 6$
$2x^2 + 2 = 6$
$x^2 = 2$

Donc $\boxed{\mathcal{S} = \left\{-\sqrt{2};\sqrt{2}\right\}}$