Exercice 20

Soient x et y 2 réels tels que :

1. $2x + 3y = 3$ et $xy = -4$
Déterminer $4x^2 + 9y^2$

2. $x - y = 3$ et $xy = 4$
Déterminer $x^2 + y^2$

3. $x + y = 13$ et $xy = 41$
Déterminer $x^3 + y^3$

4. $x + y = 4$ et $xy = -3$
Déterminer $x^2 + y^2$ puis $x^4 + y^4$

Solution

<u>Remarque :</u> en analysant les données et l'expression à calculer, on n'a pas trop d'autres pistes que d'élever la somme donnée au carré ou au cube et voir ce que cela donne !

1. D'après l'énoncé, on a $(2x + 3y)^2 = 9$

Or $(2x + 3y)^2 = 4x^2 + 9y^2 + 12xy$

Comme $xy = -4$, $12xy = -48$

Finalement $4x^2 + 9y^2 - 48 = 9$

$\boxed{\text{Donc } 4x^2 + 9y^2 = 57}$

2. On recommence avec la même technique :

$(x - y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy = 9$

Et $2xy = 8$

Ainsi $x^2 + y^2 - 8 = 9$

$\boxed{\text{Et donc } x^2 + y^2 = 17}$

3. Nous allons cette fois élever $x + y$ au cube pour faire apparaître x^3 et y^3 :

$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 = 13^3 = 2197$

<u>Remarque :</u> on utilise la formule du binôme de Newton. Les coefficients sont « donnés » par le triangle de Pascal. Tu peux vérifier en développant (ou en faisant une recherche !), c'est intéressant de les connaitre pour les degrés 3 et 4, au moins de connaître le principe pour retrouver le résultat sans tout développer.

On ne peut pas utiliser directement la valeur de xy, qui n'apparaît pas dans l'expression développée.
On a par contre : $xy(x + y) = x^2y + xy^2 = 13 \times 41 = 533$

On a donc $x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 = x^3 + y^3 + 3(x^2y + xy^2) = x^3 + y^3 + 1599 = 2197$

$\boxed{\text{Et finalement } x^3 + y^3 = 2197 - 1599 = 597}$

4. Pour la première question, utilisons la même technique que précédemment

$(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy = 16$

avec $xy = -3$, on obtient $(x + y)^2 = x^2 + y^2 - 6 = 16$

$\boxed{\text{Donc } x^2 + y^2 = 22}$

Attaquons maintenant la puissance 4 ! Je vais encore utiliser directement la formule du binôme de Newton (oui, je triche un peu) :
$\left(x+y\right)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4 = 4^4 = 256$

De plus $6x^2y^2 = 6\left(xy\right)^2 = 6 \times (-3)^2 = 54$
Et $4x^3y + 4xy^3 = 4xy\left(x^2+y^2\right) = 4 \times (-3) \times 22 = -264$ (en utilisant la première partie de la question)

Ainsi $x^4 + y^4 - 264 + 54 = x^4 + y^4 - 210 = 256$

On conclut $x^4 + y^4 = 466$

Exercice 21

Soient a et b 2 réels tels que $\dfrac{a}{1+b} + \dfrac{b}{1+a} = 1$

Démontrer que $a^3 + b^3 = a + b$

Solution

<u>Remarque :</u> cet exercice est classé dans les plus difficiles, en particulier car il nécessite de connaître les identités remarquables de degré 3 et que tu as peu de chances de les deviner si tu ne les as jamais vues !
On a $a^3 + b^3 = \left(a+b\right)\left(a^2 - ab + b^2\right)$. Je te laisse chercher la formule pour $a^3 - b^3$.

Étudions dans un premier temps la propriété donnée en hypothèse :
$$\frac{a}{1+b} + \frac{b}{1+a} = \frac{a(1+a) + b\left(1+b\right)}{(1+a)\left(1+b\right)} = \frac{a + a^2 + b + b^2}{a + b + ab + 1}$$

Comme $\dfrac{a}{1+b} + \dfrac{b}{1+a} = 1$, on a $\dfrac{a + a^2 + b + b^2}{a + b + ab + 1} = 1$

On peut donc écrire $a + a^2 + b + b^2 = a + b + ab + 1$
Ou encore $a^2 + b^2 = ab + 1$ et finalement $a^2 + b^2 - ab = 1$

En utilisant l'identité remarquable indiquée, on a :
$a^3 + b^3 = \left(a+b\right)\left(a^2 - ab + b^2\right) = \left(a+b\right) \times 1$

Et on conclut $a^3 + b^3 = a + b$

Exercice 22

Formule de Héron

La formule de Héron permet de calculer l'aire d'un triangle connaissant la longueur de ses trois côtés.

Si les longueurs des côtés sont a, b et c, alors en appelant p le **demi**-périmètre du triangle et S son aire, on a $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

Pour la démonstration, on considère un triangle ABC de hauteur AH, tel que $\widehat{BAC}$ soit un angle aigu.

On appelle :

- a, b, c les longueurs respectives des côtés BC, AC et AB
- h_a la hauteur AH
- x la longueur HC

1. Exprimer S en fonction de a et h_a
2. Exprimer p en fonction de a, b et c
3. Exprimer c^2 en fonction de a, b et x
4.

a. En déduire l'écriture de x en fonction de a, b et c

b. En déduire l'écriture de h_a^2 en fonction de a, b et c.

Prouver que : $h_a^2 = \left(b - \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2a}\right)\left(b + \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2a}\right)$

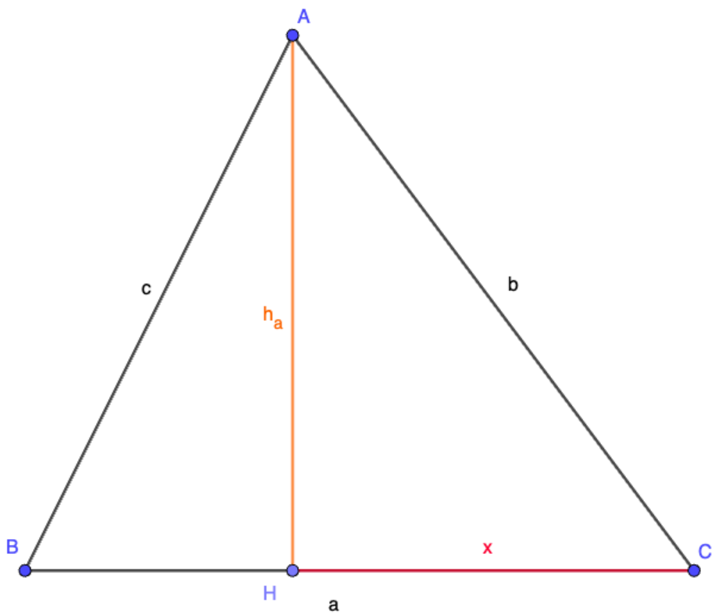
Puis que $h_a^2 = \dfrac{1}{4a^2}\left(2ab - a^2 - b^2 + c^2\right)\left(2ab + a^2 + b^2 - c^2\right)$

c. Factoriser $2ab - a^2 - b^2 + c^2$ et $2ab + a^2 + b^2 - c^2$

5. En déduire la formule de Héron

Solution

Reprenons les éléments dans une schéma :



1. D'après les noms utilisés :

$$\boxed{S = \frac{a h_a}{2}}$$

<u>Remarque :</u> j'espère que cette formule te parait évidente !

2. Attention, p est le demi-périmètre :

$$\boxed{p = \frac{a+b+c}{2}}$$

3. Nous allons utiliser le théorème de Pythagore dans les 2 triangles AHB et AHC

Dans AHB :
$c^2 = h_a^2 + (a-x)^2$

Dans AHC :
$b^2 = h_a^2 + x^2$ ou $h_a^2 = b^2 - x^2$

En remplaçant h_a^2 dans la première égalité :
$c^2 = b^2 - x^2 + (a-x)^2 = b^2 - x^2 + a^2 + x^2 - 2ax$

Finalement, $\boxed{c^2 = a^2 + b^2 - 2ax}$

4.

a. On a $2ax = a^2 + b^2 - c^2$ ou $\boxed{x = \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2a}}$

b. En repartant de la question précédente :
$h_a^2 = b^2 - x^2 = \left(b+x\right)\left(b-x\right)$

On trouve finalement $\boxed{h_a^2 = \left(b - \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2a}\right)\left(b + \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2a}\right)}$

On peut réécrire cette formule en mettant tout au même dénominateur :

$$h_a^2 = \left(\frac{2ab - a^2 - b^2 + c^2}{2a}\right)\left(\frac{2ab + a^2 + b^2 - c^2}{2a}\right)$$

Ou encore $\boxed{h_a^2 = \dfrac{1}{4a^2}\left(2ab - a^2 - b^2 + c^2\right)\left(2ab + a^2 + b^2 - c^2\right)}$

c. On reconnait des identités remarquables dans chacune des expressions :

$$2ab - a^2 - b^2 + c^2 = c^2 - \left(a^2 + b^2 - 2ab\right) = c^2 - \left(a-b\right)^2 = \left(c+a-b\right)\left(c-a+b\right)$$

Et $\boxed{2ab - a^2 - b^2 + c^2 = \left(a-b+c\right)\left(-a+b+c\right)}$

$$2ab + a^2 + b^2 - c^2 = \left(a+b\right)^2 - c^2 = \left(a+b+c\right)\left(a+b-c\right)$$

$$\boxed{2ab + a^2 + b^2 - c^2 = \left(a+b+c\right)\left(a+b-c\right)}$$

5. Réécrivons les 2 expression de 4.c en utilisant l'expression de p

On utilise (je ne le détaille qu'une fois) : $a+b-c=a+b+c-2c=2p-2c$
Ce qui donne : $(a+b+c)(a+b-c)=2p(2p-2c)=4p(p-c)$

De la même façon : $(a-b+c)(-a+b+c)=(2p-2b)(2p-2a)=4(p-a)(p-b)$

On a alors : $h_a^2=\dfrac{1}{4a^2}\times 4(p-a)(p-b)\times 4p(p-c)=\dfrac{4}{a^2}p(p-a)(p-b)(p-c)$

Et finalement $h_a=\dfrac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

En intégrant cette expression dans la formule de l'aire du triangle, on trouve directement :

$$\boxed{S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$$