EXERCICE1 : (10 points)

Partie I

Pour tout entier naturel **non nul** n , on considère la fonction f_n définie sur $I=[0,+\infty[$

par : $f_n(0)=0$ et $(\forall x\in]0,+\infty[)$; $f_n(x)=\sqrt{x}(\ln x)^n$

et soit (C_n) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$

0.5 1-a) Vérifier que : $(\forall x\in]0,+\infty[)$; $\sqrt{x}(\ln x)^n=(2n)^n\left(x^{\frac{1}{2n}}\ln\left(x^{\frac{1}{2n}}\right)\right)^n$, en déduire que f_n est continue à droite en 0

0.25 b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$

0.75 c) Vérifier que : $(\forall x\in]0,+\infty[)$; $\dfrac{f_n(x)}{x}=(2n)^n\left(\dfrac{\ln\left(x^{\frac{1}{2n}}\right)}{x^{\frac{1}{2n}}}\right)^n$, en déduire $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f_n(x)}{x}$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

0.5 d) Calculer, suivant la parité de n, $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f_n(x)}{x}$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

0.75 2-a) Montrer que f_n est dérivable sur $]0;+\infty[$ et que :

$$(\forall x\in]0,+\infty[)\ ;\quad f_n'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}(\ln x)^{n-1}(2n+\ln x)$$

0.25 b) Vérifier que : $\forall n\geq 2$, $f_n'(x)=0$ si et seulement si ($x=1$ ou $x=e^{-2n}$)

1 c) Étudier, suivant la parité de n, le sens de variation de f_n et donner son tableau de variations.

0.25 d) Montrer que si n est impair et $n\geq 3$ alors le point d'abscisse 1 est un point d'inflexion de (C_n)

Partie II :

1- Soit $\beta\in]1,e[$ un réel fixé. On considère la suite numérique $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par :

$$(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ ;\quad u_n=f_n(\beta)$$

0.25 a) Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$; $0<u_n<\sqrt{e}$

0.25 b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est décroissante.

0.25 c) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

0.5 2-a) Montrer que pour tout entier n non nul, il existe un unique réel $x_n\in]1;e[$ tel que : $f_n(x_n)=1$

0.75 b) Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ainsi définie est croissante, en déduire qu'elle est convergente.

3- On pose : $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$

0.5 a) Montrer que : $1 < \ell \leq e$

0.25 b) Montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} (\ln x_n)^n = \dfrac{1}{\sqrt{\ell}}$

0.25 c) Montrer que si $\ell < e$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} n\ln(\ln x_n) = -\infty$

0.25 d) En déduire la valeur de ℓ

Partie III :

On pose pour tout $x \in I$, $F(x) = \int_x^1 (f_1(t))^2\, dt$

0.25 1-a) Montrer que la fonction F est continue sur I

1 b) En utilisant une double intégration par parties, montrer que :

$$(\forall x \in]0,+\infty[) \; ; F(x) = -\frac{x^2}{2}\ln^2(x) + \frac{x^2}{2}\ln(x) + \frac{1}{4}(1-x^2)$$

0.5 2-a) Calculer $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} F(x)$

0.25 b) En déduire la valeur de $F(0)$

0.5 c) Calculer, en cm^3, le volume du solide engendré par la rotation d'un tour complet autour de l'axe des abscisses de la portion de la courbe (C_1) relative à l'intervalle $[0,1]$. (On prendra $\|\vec{i}\| = 1\text{cm}$)

<u>EXERCICE2</u> :(3.5 points)

Les parties I et II peuvent être traitées indépendamment.

PARTIE I :

On considère dans $\mathbb{R}_+^2$ le système suivant : (S): $\begin{cases} \sqrt{x}\left(1+\dfrac{1}{x+y}\right) = \dfrac{12}{5} \\ \sqrt{y}\left(1-\dfrac{1}{x+y}\right) = \dfrac{4}{5} \end{cases}$

1- Soit $(x,y) \in \mathbb{R}_+^2$ une solution du système (S). On pose : $z = \sqrt{x} + i\sqrt{y}$

0.25 a) Montrer que : $z + \dfrac{1}{z} = \dfrac{12}{5} + \dfrac{4}{5}i$

0.75 b) Montrer que : $z^2 - \left(\dfrac{12}{5} + \dfrac{4}{5}i\right)z + 1 = 0$, en déduire les valeurs possibles de z

(On remarque que : $\dfrac{28}{25} + \dfrac{96}{25}i = \left(\dfrac{2}{5}(4+3i)\right)^2$)

0.25 c) En déduire les valeurs du couple (x,y)

0.5 2- Résoudre dans $\mathbb{R}_+^2$ le système (S)

PARTIE II :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$

Soit (U) le cercle de centre O et de rayon 1 et $A(a)$, $B(b)$ et $C(c)$ trois points du cercle (U) deux à deux distincts.

0.25 | 1- Montrer que : $(\forall z\in\mathbb{C})$; $|z|=1 \Leftrightarrow \bar{z}=\dfrac{1}{z}$

0.5 | 2-a) La droite passant par A et parallèle à (BC) coupe le cercle (U) au point $P(p)$

Montrer que : $p=\dfrac{bc}{a}$.

0.5 | b) La droite passant par A et perpendiculaire à (BC) coupe le cercle (U) au point $Q(q)$. Montrer que : $q=-p$

0.5 | c) La droite passant par C et parallèle à (AB) coupe le cercle (U) au point $R(r)$ Montrer que les deux droites (PR) et (OB) sont perpendiculaires.

EXERCICE3 :(3.5 points)

On rappelle que $\left(M_3(\mathbb{R}),+,\times\right)$ est un anneau unitaire et non commutatif d'unité

$I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$. Soit $E=\left\{M(a,b,c)=\begin{pmatrix}a&0&0\\0&b&-c\\0&c&b\end{pmatrix}/(a,b,c)\in\mathbb{R}^3\right\}$

0.25 | 1- Montrer que E est un sous-groupe de $\left(M_3(\mathbb{R}),+\right)$

2- On munit l'ensemble $\mathbb{R}\times\mathbb{C}$ de la loi de composition interne $*$ définie par :

$\forall\left((x, z),(x', z')\right)\in(\mathbb{R}\times\mathbb{C})^2$; $(x, z)*(x', z')=(x+x' , z+z')$ et on considère l'application φ définie de E vers $\mathbb{R}\times\mathbb{C}$ par :

$$\forall(a, b,c)\in\mathbb{R}^3 , \varphi\left(M(a,b,c)\right)=(a, b+ci)$$

0.5 | a) Montrer que φ est un homomorphisme de $(E,+)$ vers $(\mathbb{R}\times\mathbb{C},*)$ et que $\varphi(E)=\mathbb{R}\times\mathbb{C}$

0.25 | b) En déduire que $(\mathbb{R}\times\mathbb{C},*)$ est un groupe commutatif.

3- On munit $\mathbb{R}\times\mathbb{C}$ de la loi de composition interne T définie par :

$$\forall\left((x, z),(x', z')\right)\in(\mathbb{R}\times\mathbb{C})^2 ; (x, z)T(x', z')=\left(x\mathrm{Re}(z')+x'\mathrm{Re}(z), zz'\right)$$

($\mathrm{Re}(z)$ désigne la partie réelle du nombre complexe z)

0.25 | a) Montrer que T est commutative.

0.25 | b) Vérifier que $(0,1)$ est l'élément neutre de T dans $\mathbb{R}\times\mathbb{C}$

0.5 | c)Vérifier que $\forall x\in\mathbb{R}$, $(1, i)T(x,-i)=(0,1)$; en déduire que T est non associative dans $\mathbb{R}\times\mathbb{C}$

4- Soit $G=\left\{(\mathrm{Im}(z), z)/z\in\mathbb{C}\right\}$

($\mathrm{Im}(z)$ désigne la partie imaginaire du nombre complexe z)

0.25 a) Montrer que G est un sous-groupe de $(\mathbb{R}\times\mathbb{C},*)$

(On remarque que $(-\mathrm{Im}(z),-z)$ est le symétrique de $(\mathrm{Im}(z),z)$ pour la loi $*$)

0.25 b) Soit ψ l'application définie de $\mathbb{C}^*$ vers $\mathbb{R}\times\mathbb{C}$ par : $\forall z\in\mathbb{C}^*;\ \psi(z)=(\mathrm{Im}(z),z)$

Montrer que ψ est un homomorphisme de $(\mathbb{C}^*,\times)$ vers $(\mathbb{R}\times\mathbb{C},T)$

0.5 c) En déduire que $(G-\{(0,0)\},T)$ est un groupe commutatif.

0.5 5- Montrer que $(G,*,T)$ est un corps commutatif.

EXERCICE4 : (3 points)

Soit p un nombre premier impair. On pose : $S=1+p+p^2+p^3+\ldots+p^{p-1}$

Soit q un nombre premier qui divise S.

0.5 1- a) Montrer que p et q sont premiers entre eux.

0.25 b) En déduire que : $p^{q-1}\equiv 1\ [q]$

0.5 c) Vérifier que : $p^p-1=(p-1)S$, en déduire que : $p^p\equiv 1\ [q]$

2- On suppose que p et $q-1$ sont premiers entre eux.

0.75 a) En utilisant le théorème de Bézout, montrer que : $p\equiv 1\ [q]$

0.25 b) En déduire que $S\equiv 1\ [q]$

0.75 3- Montrer que : $q\equiv 1\ [p]$

FIN