Bac Maroc Septembre 2023

Exercice 1
Partie I

1.
a. En utilisant les priorités du logarithme, on peut écrire :
$$\forall x \in \left]0;+\infty\right[,\ \sqrt{x}\left(\ln x\right)^n = \left(x^{\frac{1}{2n}}\right)^n \left(\ln\left(x^{\frac{1}{2n}}\right)^{2n}\right)^n = \left(x^{\frac{1}{2n}}\right)^n \left(2n\ln\left(x^{\frac{1}{2n}}\right)\right)^n$$

Et donc, en regroupant les termes comme proposé dans l'énoncé, on trouve :

$$\boxed{\forall x \in \left]0;+\infty\right[,\ \sqrt{x}\left(\ln x\right)^n = (2n)^n\left(x^{\frac{1}{2n}}\ln\left(x^{\frac{1}{2n}}\right)\right)^n}$$

n étant fixé dans $\mathbb{N}^*$ (ce qui nous assure que $\dfrac{1}{2n} > 0$), on sait, par croissance comparée que
$$\lim_{x\to 0_+} x^{\frac{1}{2n}}\ln\left(x^{\frac{1}{2n}}\right) = 0$$

Et donc $\lim\limits_{x\to 0_+} f_n(x) = 0$

$\boxed{\text{Ainsi, par définition de } f_n(0) = 0, \text{ on conclut que } f_n \text{ est continue à droite en } 0.}$

b. Pour la limite en $+\infty$, il n'y a pas de forme indéterminée, je n'insiste donc pas :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty}$$

c. $\forall x \in \left]0;+\infty\right[,\ \dfrac{f_n(x)}{x} = (2n)^n \dfrac{\left(x^{\frac{1}{2n}}\ln\left(x^{\frac{1}{2n}}\right)\right)^n}{x} = (2n)^n\left(\dfrac{x^{\frac{1}{2n}}\ln\left(x^{\frac{1}{2n}}\right)}{x^{\frac{1}{n}}}\right)^n$

$$\boxed{\text{Et donc } \forall x \in \left]0;+\infty\right[,\ \frac{f_n(x)}{x} = (2n)^n\left(\frac{\ln\left(x^{\frac{1}{2n}}\right)}{x^{\frac{1}{2n}}}\right)^n}$$

On peut à nouveau utiliser la croissance comparée pour déduire que :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{f_n(x)}{x} = 0}$$

Cette limite signifie que la courbe C_n admet une branche infinie de direction asymptotique l'axe des abscisses.

©antoine.remond.maths@gmail.com

d. Quand $x \to 0_+$, $\ln\left(x^{\frac{1}{2n}}\right) \to -\infty$ et $\dfrac{1}{x^{\frac{1}{2n}}} \to +\infty$, donc $\dfrac{\ln\left(x^{\frac{1}{2n}}\right)}{x^{\frac{1}{2n}}} \to -\infty$

Et donc, si n est pair, on a $\lim\limits_{x\to 0_+} \dfrac{f_n(x)}{x} = +\infty$ et si n est impair, on a $\lim\limits_{x\to 0_+} \dfrac{f_n(x)}{x} = -\infty$

On reconnaît un taux d'accroissement $\dfrac{f_n(x)}{x} = \dfrac{f_n(x) - f_n(0)}{x-0}$

Et donc C_n va avoir une tangente verticale en 0, dont l'orientation est donnée par la parité de n.

2.
a. f_n est dérivable sur $\left]0; +\infty\right[$ comme produit de fonctions qui le sont.
<u>Rappel :</u> je rappelle au passage que $x \mapsto \sqrt{x}$ n'est pas dérivable en 0 !

$$\forall x \in \left]0;+\infty\right[,\ f_n'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}(\ln x)^n + \sqrt{x}\left(\frac{n}{x}(\ln x)^{n-1}\right) = \frac{1}{2\sqrt{x}}(\ln x)^n + \frac{n}{\sqrt{x}}(\ln x)^{n-1}$$

Et finalement, $\forall x \in \left]0;+\infty\right[,\ f_n'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}(\ln x)^{n-1}(2n + \ln x)$

b. Soit $n \geqslant 2$
$\forall x \in \left]0;+\infty\right[,\ \dfrac{1}{\sqrt{x}} \neq 0$, donc $f_n'(x) = 0$ si $(\ln x)^{n-1} = 0$ (et donc $\ln x = 0$) ou $2n + \ln x = 0$.

Or $\ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$
Et $2n + \ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = -2n \Leftrightarrow x = e^{-2n}$

Donc $\forall n \geqslant 2, f_n'(x) = 0$ si et seulement si $x = 1$ ou $x = e^{-2n}$

c. <u>Commençons par considérer n impair</u>. Dans ce cas, $\forall x \in \left]0;+\infty\right[$:
$\dfrac{1}{2\sqrt{x}} \geqslant 0$ et $(\ln x)^{n-1} \geqslant 0$
Donc $f_n'(x)$ est du signe de $2n + \ln x$, ce qui donne le tableau de variation :

x	$-\infty$		e^{-2n}		1		$+\infty$
$f_n'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	
$f_n(x)$	0	$\searrow$	$-(2n)^n e^{-n}$	$\nearrow$		$\nearrow$	$+\infty$

Traitons maintenant le cas n pair.
Cette fois, $(\ln x)^{n-1}$ est du signe de $\ln x$ et donc :

x	$-\infty$		e^{-2n}		1		$+\infty$
$f_n'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f_n(x)$	0	$\nearrow$	$(2n)^n e^{-n}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Remarque : je te laisse faire le tableau de signes plus détaillé si besoin !

d. Étudions la dérivée seconde de f_n
Rappel : Un point d'inflexion correspond à un point changement de convexité, ce qui se caractérise par un changement de la dérivée seconde.

f_n est bien 2 fois dérivable sur $]0;+\infty[$ car f_n' est dérivable en tant que produit de fonctions qui le sont.

$$\forall x \in]0;+\infty[,\ f_n''(x) = -\frac{1}{4x\sqrt{x}}(\ln x)^{n-1}(2n+\ln x) + \frac{1}{2x\sqrt{x}}(\ln x)^{n-1} + \frac{n-1}{2x\sqrt{x}}(\ln x)^{n-2}(2n+\ln x)$$
$$= \frac{1}{2x\sqrt{x}}(\ln x)^{n-2}\left[\ln x + \left(n-1-\frac{1}{4}\ln x\right)(2n+\ln x)\right]$$

Comme $n \geqslant 3$, au voisinage de 1, $\ln x + \left(n-1-\frac{1}{4}\ln x\right)(2n+\ln x) > 0$.

Donc $f_n''(x)$ est du signe de $(\ln x)^{n-2}$ et donc de $\ln x$, qui change bien de signe en 1.

Donc pour $n \geqslant 3$, le point d'abscisse 1 est un point d'inflexion de C_n

Partie II
1.
a. Soit $\beta \in]1;e[$ et $n \in \mathbb{N}^*$
Par définition, $u_n = f_n(\beta) = \sqrt{\beta}(\ln \beta)^n$
Or $0 < \ln \beta < 1$, donc $0 < (\ln \beta)^n < 1$ et $1 < \sqrt{\beta} < \sqrt{e}$

Donc on a bien $0 < u_n < \sqrt{e}$

b. Étudions le sens de variation de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$
$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} - u_n = \sqrt{\beta}(\ln \beta)^{n+1} - \sqrt{\beta}(\ln \beta)^n = \sqrt{\beta}(\ln \beta)^n(\ln \beta - 1)$

Or $0 < \ln \beta < 1$, donc $u_{n+1} - u_n < 0$.

Ainsi, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien décroissante.

c. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée, donc convergente.

©antoine.remond.maths@gmail.com

Comme $0 < \ln \beta < 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} (\ln \beta)^n = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{\beta}\,(\ln \beta)^n = 0$

Et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$

2.

a. D'après la partie I on sait déjà que f_n est continue et strictement croissante sur $]1; e[$.

De plus, $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f_n(1) = 0$ et $f_n(e) = \sqrt{e} \approx 1{,}65 > 1$

Cela nous assure de l'existence d'un unique $x_n \in]1; e[$ tel que $f_n(x_n) = 1$

b. Par définition de $x_{n+1}, f_{n+1}(x_{n+1}) = \sqrt{x_{n+1}}\,(\ln x_{n+1})^{n+1} = 1$

Or $\sqrt{x_{n+1}}\,(\ln x_{n+1})^{n+1} = \sqrt{x_{n+1}}\,(\ln x_{n+1})^n (\ln x_{n+1}) = (\ln x_{n+1}) f_n(x_{n+1})$

Comme $\ln x_{n+1} < 1, f_n(x_{n+1}) > 1$ et comme f_n est croissante, $x_{n+1} > x_n$

Et donc $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante. Comme elle est majorée par e, elle converge.

3.

a. On sait que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 1 < x_n < e$.

Par l'absurde, si $l > e$, $\exists \epsilon > 0,\ l = e + \epsilon$ et donc $\exists N \in \mathbb{N}^*,\ \left|x_N - l\right| \leqslant \frac{\epsilon}{2}$, ce qui implique que $x_N > e$.

Ainsi, on conclut que $1 < l \leqslant e$

b. $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{x_n}\,(\ln x_n)^n = 1$

Par continuité de la fonction racine carrée et la propriété du produit des limites, on a donc :

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt{x_n}\,(\ln x_n)^n = \lim_{n \to +\infty} \sqrt{x_n} \times \lim_{n \to +\infty} (\ln x_n)^n = \sqrt{l} \times \lim_{n \to +\infty} (\ln x_n)^n = 1$$

Et finalement $\lim\limits_{n \to +\infty} (\ln x_n)^n = \dfrac{1}{\sqrt{l}}$

c. Si $l < e$, comme $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante, $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ x_n \leqslant l < e$ et donc $\ln x_n < 1$

Ainsi $\lim\limits_{n \to +\infty} (\ln x_n)^n = 0$ et par continuité du logarithme :

$$\ln\left(\lim_{n \to +\infty} (\ln x_n)^n\right) = \lim_{n \to +\infty} n \ln(\ln x_n) = -\infty$$

Donc si $l < e$, $\lim\limits_{n \to +\infty} n \ln(\ln x_n) = -\infty$

d. Par ailleurs, d'après la question b, en utilisant le même passage à la limite, on obtient :

$$\lim_{n \to +\infty} n \ln(\ln x_n) = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{l}}\right)$$

Les 2 résultats sont donc contradictoires !

Ce qui impose donc que $l = e$.

©antoine.remond.maths@gmail.com

Partie III

1.

a. F est définie par :

$$\forall x \in I,\ F(x) = \int_x^1 \left(f_1(t)\right)^2 \mathrm{d}t = \int_x^1 \left(\sqrt{t} \ln t\right)^2 \mathrm{d}t = \int_x^1 t \left(\ln t\right)^2 \mathrm{d}t$$

Comme f_1 est continue sur I,

le théorème fondamental de l'analyse nous assure que F est continue sur I.

b. Utilisons des intégrations par parties comme proposé dans l'énoncé :

$$\forall x \in \left]0, +\infty\right[,\ F(x) = \int_x^1 t \left(\ln t\right)^2 \mathrm{d}t = \left[\frac{t^2}{2}\left(\ln t\right)^2\right]_x^1 - \int_x^1 \frac{t^2}{2} \times \frac{2}{t} \ln t \,\mathrm{d}t = -\frac{x^2}{2}\left(\ln x\right)^2 - \int_x^1 t \ln t \,\mathrm{d}t$$

$$= -\frac{x^2}{2}\left(\ln x\right)^2 - \left[\frac{t^2}{2} \ln t\right]_x^1 + \int_x^1 \frac{t^2}{2} \times \frac{1}{t} \mathrm{d}t = -\frac{x^2}{2}\left(\ln x\right)^2 + \frac{x^2}{2} \ln x + \left[\frac{t^2}{4}\right]_x^1$$

Et donc $\forall x \in \left]0, +\infty\right[,\ F(x) = -\frac{x^2}{2}\left(\ln x\right)^2 + \frac{x^2}{2} \ln x + \frac{1}{4}\left(1 - x^2\right)$

2.

a. Par croissance comparée, on obtient :

Quand $x \to 0$, $\frac{x^2}{2}\left(\ln x\right)^2 = \frac{\left(x \ln x\right)^2}{2} \to 0$ et $\frac{x^2}{2} \ln x \to 0$.

Et finalement, $\lim_{x \to 0} F(x) = \frac{1}{4}$

b. Par continuité de F,

On déduit que $F(0) = \frac{1}{4}$

c. Pour obtenir le volume recherché, on va utiliser la formule, en notant V le volume à calculer :

$$V = \int_0^1 \pi \left(f_1(t)\right)^2 \mathrm{d}t$$

<u>Rappel :</u> cette formule correspond en fait à une « somme infinie » de petits disques de rayon $f_1(t)$ et de hauteur $\mathrm{d}t$

Et donc $V = \pi F(0) = \frac{\pi}{4}$

Exercice 2

Partie I

1.

a. En posant $z = \sqrt{x} + i\sqrt{y}$, notons déjà que $|z|^2 = \left(\sqrt{x}\right)^2 + \left(\sqrt{y}\right)^2 = x + y$

On remarque également que $(0{,}0)$ n'est pas solution de (S) donc $z \neq 0$.

$(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$ étant solution de (S), on peut faire une combinaison linéaire des 2 lignes « $(1) + i\,(2)$ » qui donne :

$$\sqrt{x}\left(1 + \frac{1}{x+y}\right) + i\sqrt{y}\left(1 - \frac{1}{x+y}\right) = \frac{12}{5} + \frac{4}{5}i$$

Or $\sqrt{x}\left(1 + \frac{1}{x+y}\right) + i\sqrt{y}\left(1 - \frac{1}{x+y}\right) = \sqrt{x} + i\sqrt{y} + \frac{\sqrt{x} - i\sqrt{y}}{x+y} = z + \frac{\bar{z}}{|z|^2} = z + \frac{1}{z}$

<u>Rappel :</u> pour $z \in \mathbb{C}^*$, $\frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{1}{z}$

$$\boxed{\text{Et finalement } z + \frac{1}{z} = \frac{12}{5} + \frac{4}{5}i}$$

b. Comme $z \neq 0$, on peut multiplier les 2 membres de l'égalité précédente par z :

$$z\left(z + \frac{1}{z}\right) = z\left(\frac{12}{5} + \frac{4}{5}i\right)$$

$$\Rightarrow z^2 + 1 = \left(\frac{12}{5} + \frac{4}{5}i\right)z$$

$$\boxed{\text{Et donc } z^2 - \left(\frac{12}{5} + \frac{4}{5}i\right)z + 1 = 0}$$

$$z^2 - \frac{2}{5}(6+2i)\,z + 1 = \left(z - \frac{1}{5}(6+2i)\right)^2 - \left(\frac{1}{5}(6+2i)\right)^2 + 1$$

$$= \left(z - \frac{1}{5}(6+2i)\right)^2 - \frac{1}{25}(36 - 4 + 24i) + 1 = \left(z - \frac{1}{5}(6+2i)\right)^2 - \frac{1}{25}(7 + 24i)$$

En introduisant l'identité indiquée dans l'énoncé, on trouve :

$$z^2 - \frac{2}{5}(6+2i)\,z + 1 = \left(z - \frac{1}{5}(6+2i)\right)^2 - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{25}(28+96i)\right) = \left(z - \frac{1}{5}(6+2i)\right)^2 - \frac{1}{4}\left(\frac{2}{5}(4+3i)\right)^2$$

Et finalement

$$z^2 - \frac{2}{5}(6+2i)\,z + 1 = \left(z - \frac{1}{5}(6+2i) + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}(4+3i)\right)\right)\left(z - \frac{1}{5}(6+2i) - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}(4+3i)\right)\right)$$

$$= \left(z - \frac{1}{5}(6+2i) + \frac{1}{5}(4+3i)\right)\left(z - \frac{1}{5}(6+2i) - \frac{1}{5}(4+3i)\right) = \left(z - \frac{1}{5}(2-i)\right)(z - 2 - i)$$

$$\boxed{\text{Et donc les valeurs possibles pour } z \text{ sont } \frac{1}{5}(2-i) \text{ et } 2+i}$$

©antoine.remond.maths@gmail.com

c. La première valeur de z implique que $\sqrt{y} = -\frac{1}{5}$ ce qui est impossible avec $y \in \mathbb{R}$!

Le seul couple possible pour (x, y) est donc $(4,1)$

2. On vérifie que $(4,1)$ est bien solution de (S) !

Finalement, la solution de (S) est $(4,1)$

Partie II

1. Montrons la double implication, en commençant par noter que dans les 2 sens, l'hypothèse implique que $z \neq 0$ (je ne le repréciserai donc pas par la suite) :

$(\Rightarrow)$

Si $|z| = 1$, $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \bar{z}$

$(\Leftarrow)$

Si $\bar{z} = \frac{1}{z}$, $z\bar{z} = |z|^2 = \frac{z}{z} = 1$

Ce qui confirme que $\forall x \in \mathbb{C},\ \bar{z} = \frac{1}{z} \Leftrightarrow |z| = 1$

2. Par construction, tous les points considérés ont une affixe de module 1. Nous pourrons donc utiliser la relation de la question précédente.

a. Par construction de P, les droites (AP) et (BC) étant parallèles, $\overrightarrow{AP}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires.

<u>Rappel :</u> l'argument du quotient des affixes de 2 vecteurs représentent l'angle formé par ces 2 vecteurs. De plus, l'angle formé par 2 vecteurs colinéaires vaut $0\ [\pi]$, ce qui caractérise un nombre réel

Cette relation signifie $\frac{p-a}{b-c} \in \mathbb{R}$ ce qu'on peut traduire par $\frac{p-a}{b-c} = \overline{\left(\frac{p-a}{b-c}\right)}$

Or $\overline{\left(\frac{p-a}{b-c}\right)} = \frac{\overline{p-a}}{\overline{b-c}} = \frac{\bar{p}-\bar{a}}{\bar{b}-\bar{c}} = \frac{\frac{1}{p}-\frac{1}{a}}{\frac{1}{b}-\frac{1}{c}} = \frac{\frac{a-p}{ap}}{\frac{c-b}{bc}}$

Et l'égalité devient donc $\frac{p-a}{b-c} = \frac{\frac{a-p}{ap}}{\frac{c-b}{bc}}$ ou $\frac{p-a}{b-c} = \frac{p-a}{b-c} \times \frac{bc}{ap}$

Et donc $\frac{bc}{ap} = 1$

Ce qui permet de conclure $p = \frac{bc}{a}$

b. Nous utilisons le même principe pour cette question.

Cette fois, $\overrightarrow{AQ}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont orthogonaux.

Cela signifie cette fois $\frac{q-a}{b-c} \in i\mathbb{R}$ ce qu'on peut traduire par $\frac{q-a}{b-c} = -\overline{\left(\frac{q-a}{b-c}\right)}$

Je ne remets pas le calcul qui est le même que pour la question précédente, on trouve finalement $\frac{bc}{aq} = -1$

Et donc $q = -\frac{bc}{a} = -p$

c. Considérons maintenant le rapport des affixes de $\overrightarrow{PR}$ et $\overrightarrow{OB}$

Utilisons le résultat de la question 2.a pour affirmer que $r = \frac{ab}{c}$.

On a d'une part : $\frac{b}{p-r} = \frac{b}{\frac{bc}{a} - \frac{ab}{c}} = \frac{abc}{bc^2 - a^2b}$

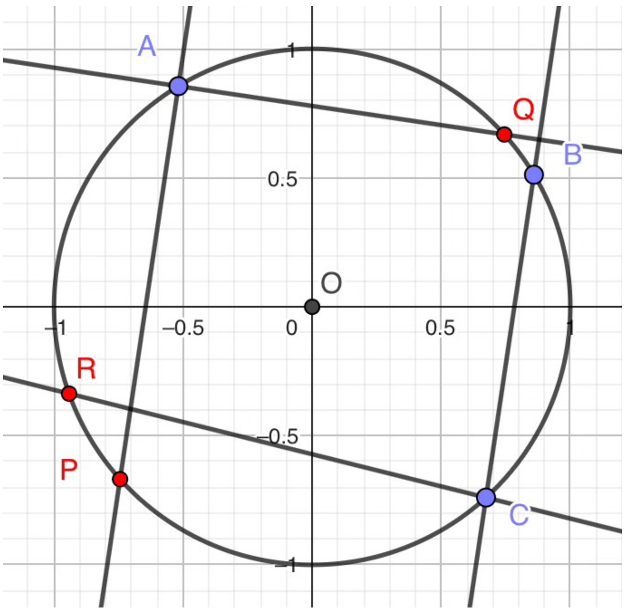
Et

$$\frac{\overline{b}}{\overline{p}-\overline{r}} = \frac{\frac{1}{b}}{\frac{1}{p}-\frac{1}{r}} = \frac{pr}{b\left(r-p\right)} = \frac{\frac{bc}{a}\times\frac{ab}{c}}{b\left(\frac{ab}{c}-\frac{bc}{a}\right)} = \frac{\frac{ab^2c}{ac}}{b\left(\frac{a^2b-bc^2}{ac}\right)} = \frac{ab^2c}{ac}\times\frac{ac}{b\left(a^2b-bc^2\right)} = \frac{abc}{a^2b-bc^2}$$

Ainsi, $\frac{\overline{b}}{\overline{p}-\overline{r}} = -\frac{b}{p-r}$

Et donc (PR) et (OB) sont orthogonales.

La figure correspondante :



©antoine.remond.maths@gmail.com

Exercice 3

1. En prenant $(a, b, c) = (0,0,0)$ on vérifie que l'élément neutre de $(M_3(\mathbb{R}), +)$ est bien élément de E

De plus, si on considère $M(a, b, c)$ et $M' = M(a', b', c')$ 2 éléments de E, on a :

$$M + M' = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & -c \\ 0 & c & b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & 0 & 0 \\ 0 & b' & -c' \\ 0 & c' & b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + a' & 0 & 0 \\ 0 & b + b' & -c - c' \\ 0 & c + c' & b + b' \end{pmatrix} = M(a + a', b + b', c + c') \in E$$

Donc E est stable par addition.

De plus $M(-a, -b, -c) = -M(a, b, c)$

Les 3 propriétés vérifiées confirment que E est un sous-groupe de $(M_3(\mathbb{R}), +)$

2.

a. La loi $*$ dans $\mathbb{R} \times \mathbb{C}$ pouvant être « décomposée » en 2 additions, son éléments neutre est $(0,0 + 0i) = (0,0)$

Comme $\varphi(M(0,0,0)) = (0,0 + 0i) = (0,0)$, on confirme que φ préserve l'élément neutre.

De plus en reprenant la question précédente et par construction de $*$, on vérifie également que :

$$\varphi\left(M(a, b, c) + M(a', b', c')\right) = \varphi\left(M(a + a', b + b', c + c')\right) = (a + a', b + b' + (c + c')i)$$
$$= (a, b + ci) * (a', b' + c'i) = \varphi\left(M(a, b, c)\right) * \varphi\left(M(a', b', c')\right)$$

La deuxième partie de la question est triviale, en faisant parcourir $\mathbb{R}$ à a, b et c, les images vont parcourir $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$.

Ainsi φ est bien un homomorphisme de $(E, +)$ vers $(\mathbb{R} \times \mathbb{C}, *)$ et $\varphi(E) = \mathbb{R} \times \mathbb{C}$

b. La stabilité par $*$ et la commutativité sont assurées par l'arithmétique sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$.

Chaque élément a bien un opposé $-(x, z) = (-x, -z)$

$(\mathbb{R} \times \mathbb{C}, *)$ est un groupe commutatif.

3.

a. Soit $((x, z), (x', z')) \in (\mathbb{R} \times \mathbb{C})^2$. On a avec les propriétés connues de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$:

$(x, z)\, T\, (x', z') = \left(x\mathrm{Re}(z') + x'\mathrm{Re}(z), zz'\right) = \left(x'\mathrm{Re}(z) + x\mathrm{Re}(z'), z'z\right) = (x', z')\, T\, (x, z)$

Et donc T est commutative.

b. Soit $(x, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}$,

$(x, z)\, T\, (0,1) = \left(x \times 1 + 0 \times \mathrm{Re}(z), z \times 1\right) = (x, z)$

Et $(0,1)$ est bien l'élément neutre de T

c. $\forall x \in \mathbb{R},\ (1,i)\, T\, (x, -i) = \left(1 \times \mathrm{Re}(-i) + x \times \mathrm{Re}(i), i \times -i\right) = (0,1)$

Soient $(x, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C},\ x' \in \mathbb{R}$

$(x, z)\, T\, \left((1,i)\, T\, (x', -i)\right) = (x, z)\, T\, (0,1) = (x, z)$

$\left((x, z)\, T\, (1,i)\right) T\, (x', -i) = \left(\mathrm{Re}(z), iz\right) T\, (x', -i) = \left(x'\mathrm{Re}(z), z\right) \neq (x, z)$

Et donc T n'est pas associative.

©antoine.remond.maths@gmail.com

4.

a. Par définition de $\mathrm{Im}(z)$, on a $G \subset \mathbb{R}\times\mathbb{C}$

$(0{,}0) \in G$ et $\left(\mathrm{Im}(-z), -z\right) = -\left(\mathrm{Im}(z), z\right)$.

De plus, si on prend z et z' dans $\mathbb{C}$, on a :

$\left(\mathrm{Im}(z), z\right) * \left(\mathrm{Im}(z'), z'\right) = \left(\mathrm{Im}(z)+\mathrm{Im}(z'), z+z'\right) = \left(\mathrm{Im}(z+z'), z+z'\right) \in G$

Et donc G est un sous-groupe de $(\mathbb{R}\times\mathbb{C}, *)$

b. 1 est l'élément neutre de $(\mathbb{C}^*, \times)$ et on a bien $\psi(1) = (0{,}1)$ qui est l'élément neutre de $(\mathbb{R}\times\mathbb{C}, T)$

$\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2$, $\psi(zz') = \left(\mathrm{Im}(zz'), zz'\right)$

Or $zz' = \left(\mathrm{Re}(z) + i\,\mathrm{Im}(z)\right)\left(\mathrm{Re}(z') + i\,\mathrm{Im}(z')\right)$

$= \mathrm{Re}(z)\,\mathrm{Re}(z') - \mathrm{Im}(z)\,\mathrm{Im}(z') + i\left(\mathrm{Re}(z)\,\mathrm{Im}(z') + \mathrm{Re}(z')\,\mathrm{Im}(z)\right)$

Ainsi, $\psi(zz') = \left(\mathrm{Re}(z)\,\mathrm{Im}(z') + \mathrm{Re}(z')\,\mathrm{Im}(z), zz'\right) = \left(\mathrm{Im}(z), z\right) T \left(\mathrm{Im}(z'), z'\right) = \psi(z)\, T\, \psi(z')$

Et donc ψ est un homomorphisme de $(\mathbb{C}^*, \times)$ vers $(\mathbb{R}\times\mathbb{C}, T)$

c. La question précédente permet de vérifier que :

Dans $G - \{0{,}0\}$, l'inverse de $\left(\mathrm{Im}(z), z\right)$ est $\left(\mathrm{Im}\left(\frac{1}{z}\right), \frac{1}{z}\right) = \left(-\mathrm{Im}\left(\frac{z}{|z|^2}\right), \frac{1}{z}\right)$

Et que T est commutatif dans $G - \{0{,}0\}$.

On peut également s'assurer de l'associativité de T dans $G - \{0{,}0\}$ grâce aux propriétés de ψ

Ce qui nous permet de conclure que $\left(G - \{0{,}0\}, T\right)$ est un groupe commutatif.

5. Un corps est un anneau dont tous les éléments, hors l'élément neutre de la première opération, sont inversibles. On a vérifié cela dans les parties précédentes, excepté la distributivité de T sur $*$.

Soient $\left(z_1, z_2, z_3\right) \in \mathbb{C}^3$,

$$\left(\mathrm{Im}\left(z_1\right), z_1\right) T \left(\left(\mathrm{Im}\left(z_2\right), z_2\right) * \left(\mathrm{Im}\left(z_3\right), z_3\right)\right) = \left(\mathrm{Im}\left(z_1\right), z_1\right) T \left(\mathrm{Im}\left(z_2\right) + \mathrm{Im}\left(z_3\right), z_2 + z_3\right)$$

$$= \left(\mathrm{Im}\left(z_1\right) \mathrm{Re}\left(z_2 + z_3\right) + \left(\mathrm{Im}\left(z_2\right) + \mathrm{Im}\left(z_3\right)\right) \mathrm{Re}\left(z_1\right), z_1\left(z_2 + z_3\right)\right)$$

$$= \left(\mathrm{Im}\left(z_1\right) \mathrm{Re}\left(z_2\right) + \mathrm{Im}\left(z_1\right) \mathrm{Re}\left(z_3\right) + \mathrm{Im}\left(z_2\right) \mathrm{Re}\left(z_1\right) + \mathrm{Im}\left(z_3\right) \mathrm{Re}\left(z_1\right), z_1z_2 + z_1z_3\right)$$

$$= \left(\mathrm{Im}\left(z_1\right) \mathrm{Re}\left(z_2\right) + \mathrm{Im}\left(z_2\right) \mathrm{Re}\left(z_1\right) + \mathrm{Im}\left(z_1\right) \mathrm{Re}\left(z_3\right) + \mathrm{Im}\left(z_3\right) \mathrm{Re}\left(z_1\right), z_1z_2 + z_1z_3\right)$$

$$= \left(\left(\mathrm{Im}\left(z_1\right), z_1\right) * \left(\mathrm{Im}\left(z_2\right), z_2\right)\right) T \left(\left(\mathrm{Im}\left(z_1\right), z_1\right) * \left(\mathrm{Im}\left(z_3\right), z_3\right)\right)$$

Ce qui conforme la distributivité.

Et finalement $(G, *, T)$ est un corps commutatif.

©antoine.remond.maths@gmail.com

Exercice 4

1.

a. Comme p et q sont tous 2 premiers, ils sont premiers entre eux ou égaux.
Mais comme q divise S, ils ne peuvent être égaux.

Donc p et q sont premiers entre eux.

b. On peut donc utiliser le petit théorème de Fermat qui nous indique que :

Comme $p \wedge q = 1,\ p^{q-1} \equiv 1\ [q]$

c. S correspond à la sommes des éléments d'une suite géométrique et donc :
$S = \dfrac{1-p^p}{1-p} = \dfrac{p^p-1}{p-1}$

Ce que l'on peut réécrire, $p^p - 1 = (p-1)\,S$.

Cela nous donne : $p^p = (p-1)\,S + 1$

Et comme q divise S, on conclut que $p^p \equiv 1\ [q]$

2.

a. On a cette fois $p \wedge q - 1 = 1$ et donc, d'après le théorème de Bezout :
$\exists (a,b) \in \mathbb{Z}^2,\ ap + b\,(q-1) = 1$ ou $ap = 1 - b\,(q-1)$

On peut donc écrire :
$p^{ap} = p^{1-b(q-1)} = p \times p^{-b(q-1)} \Leftrightarrow (p^p)^a = p\,(p^{q-1})^b$

Et en utilisant les résultats de la question 1 : $p^p \equiv 1\ [q]$ et $p^{q-1} \equiv 1\ [q]$

Ce qui nous donne donc $p \equiv 1\ [q]$

b. En utilisant le résultat précédente, on peut écrire :
Comme $p \equiv 1\ [q],\ \forall k \in \mathbb{N},\ p^k \equiv 1\ [q]$ et donc
$S \equiv 1 + 1 + 1 + \ldots + 1\ [q] \equiv p\ [q]$

Et finalement $S \equiv 1\ [q]$

3. On vient de voir que si p et $q-1$ sont premiers entre eux, $S \equiv 1\ [q]$.
Mais par hypothèse, q divise S ou $S \equiv 0\ [q]$.

Il est donc impossible que p et $q-1$ soient premiers entre eux !

Et comme p est premier, il divise $q-1$.

Ce qui se traduit par $p \equiv 1\ [q]$

©antoine.remond.maths@gmail.com