

Exercice 16

Développer et réduire

$$A = (2x^2 - y)^2$$

$$B = (3x^2 - 2y^3)(3x^2 + 2y^3)$$

$$C = (4abc - 5ac)^2$$

$$D = (12a^4 - 11ab)(11ab + 12a^4)$$

$$E = (3a - 2)(3a + 2)(9a^2 + 4)$$

$$F = (2a - 3)^2(2a + 3)^2$$

Solution

$$A = (2x^2 - y)^2 = 4x^4 + y^2 - 4x^2y$$

Remarque : on retrouve l'identité remarquable $(a - b)^2$. Il ne faut pas se laisser intimider par le carré à l'intérieur de la parenthèse !

$$B = (3x^2 - 2y^3)(3x^2 + 2y^3) = 9x^4 - 4y^6$$

Remarque : même remarque que précédemment !

$$C = (4abc - 5ac)^2 = 16a^2b^2c^2 - 40a^2bc^2 + 25a^2c^2 = a^2c^2(16b^2 - 40b + 25)$$

$$D = (12a^4 - 11ab)(11ab + 12a^4) = 144a^8 - 121a^2b^2$$

Remarque : c'est un peu le thème de l'exercice, l'identité remarquable $(a + b)(a - b)$ un peu réarrangée ne modifie pas le résultat !

$$E = (3a - 2)(3a + 2)(9a^2 + 4) = (9a^2 - 4)(9a^2 + 4) = 81a^4 - 16$$

$$F = (2a - 3)^2(2a + 3)^2 = [(2a - 3)(2a + 3)]^2 = (4a^2 - 9)^2 = 16a^4 - 72a^2 + 81$$

Remarque : on peut évidemment développer les carrés en premier, mais c'est passablement plus compliqué, je te laisse vérifier si besoin !

Exercice 17

Développer puis réduire

$$A = (3x - 2y - 1)^2$$

$$B = (3x + y + z)(3x - y - z)$$

$$C = (2a^n - a^{n+1})^2$$

$$D = (4a^{3n} + 3a^{2n})(4a^{3n} - 3a^{2n})$$

$$E = \left[x^2 + (2 + \sqrt{2})x + 1 + \sqrt{2} \right] \times \left[x^2 + (2 - \sqrt{2})x + 1 - \sqrt{2} \right]$$

$$F = (x^2 + x\sqrt{3} + 1)(x^2 + 1)(x^2 - x\sqrt{3} + 1)$$

Solution

$$\begin{aligned} A &= (3x - 2y - 1)^2 = (3x - 2y - 1)(3x - 2y - 1) = 9x^2 - 6xy - 3x - 6xy + 4y^2 + 2y - 3x + 2y + 1 \\ &= 9x^2 + 4y^2 - 12xy - 6x + 4y + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= (3x + y + z)(3x - y - z) = (3x + y + z)(3x - (y + z)) = 9x^2 - (y + z)^2 \\ &= 9x^2 - y^2 - z^2 - 2yz \end{aligned}$$

$$C = (2a^n - a^{n+1})^2 = 4a^{2n} + a^{2n+2} - 4a^{2n+1} = a^{2n} (a^2 - 4a + 4)$$

$$D = (4a^{3n} + 3a^{2n}) (4a^{3n} - 3a^{2n}) = 16a^{6n} - 9a^{4n} = a^{4n} (16a^{2n} - 9)$$

$$\begin{aligned} E &= \left[x^2 + (2 + \sqrt{2})x + 1 + \sqrt{2} \right] \times \left[x^2 + (2 - \sqrt{2})x + 1 - \sqrt{2} \right] \\ &= \left[x^2 + 2x + 1 + \sqrt{2}x + \sqrt{2} \right] \times \left[x^2 + 2x + 1 - \sqrt{2}x - \sqrt{2} \right] \\ &= \left[(x+1)^2 + \sqrt{2}(x+1) \right] \times \left[(x+1)^2 - \sqrt{2}(x+1) \right] = (x+1)^4 - 2(x+1)^2 \\ &= (x+1)^2 \left[(x+1)^2 - 2 \right] = (x^2 + 2x + 1)(x^2 + 2x - 1) \\ &= x^4 + 2x^3 - x^2 + 2x^3 + 4x^2 + 2x + x^2 + 2x - 1 = x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 4x - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F &= (x^2 + x\sqrt{3} + 1)(x^2 + 1)(x^2 - x\sqrt{3} + 1) = (x^2 + 1 + x\sqrt{3})(x^2 + 1 - x\sqrt{3})(x^2 + 1) \\ &= \left[(x^2 + 1)^2 - 3x^2 \right] \times (x^2 + 1) = (x^4 + 2x^2 + 1 - 3x^2)(x^2 + 1) = (x^4 - x^2 + 1)(x^2 + 1) \\ &= x^6 + x^4 - x^4 - x^2 + x^2 + 1 = x^6 + 1 \end{aligned}$$

Exercice 18

Développer puis réduire

$$A = (3 - y)^2$$

$$B = (5 - 2x^2)^2$$

$$C = (2ab^2 - 3c^3d^4)^2$$

$$D = (x + 2y)^2 - 4xy$$

$$E = (xy - 4y)^2$$

$$F = (ax + by)^2$$

$$G = (a + 2b + 3c)^2$$

$$H = (a + 2b - c)^2$$

Solution

$$A = (3 - y)^2 = 9 - 6y + y^2 = y^2 - 6y + 9$$

Remarque : les 2 expressions sont exactement les mêmes, mais on a plutôt l'habitude de « ranger » par puissances décroissantes des expressions littérales.

$$B = (5 - 2x^2)^2 = 4x^4 - 20x^2 + 25$$

Remarque : j'ai directement rangé dans le sens des puissances décroissantes comme évoqué pour la question précédente. N'hésite pas à refaire l'étape intermédiaire si besoin !

$$C = (2ab^2 - 3c^3d^4)^2 = 4a^2b^4 - 12ab^2c^3d^4 + 9c^6d^8$$

Remarque : En complément de la « règle » précédente, on range également en respectant l'ordre alphabétique si plusieurs expressions littérales sont impliquées.

$$D = (x + 2y)^2 - 4xy = x^2 + 4xy + 4y^2 - 4xy = x^2 + 4y^2$$

$$E = (xy - 4y)^2 = x^2y^2 - 8xy^2 + 16y^2 = y^2(x^2 - 8x + 16)$$

$$F = (ax + by)^2 = a^2x^2 + 2abxy + b^2y^2$$

$$G = (a + 2b + 3c)^2 = a^2 + 4b^2 + 9c^2 + 4ab + 6ac + 12bc$$

Remarque : On a une formule similaire à l'identité remarquable $(a + b)^2$ avec la somme des carrés des membres et les doubles produits. Je te laisse le vérifier en développant !

$$H = (a + 2b - c)^2 = a^2 + 4b^2 + c^2 + 4ab - 2ac - 4bc$$

Exercice 19

Factoriser au mieux

$$A = 9ab - 6a^2 + 12ab^2$$

$$B = a^3b^2c - a^2bc + a^5b^3c^2$$

$$C = 16(a - b) - x^4(a - b)$$

$$D = 25(x^2 - y^2) + a^2(y^2 - x^2)$$

$$E = 5ax - 5ay - bx + by$$

$$F = 4a^2(3 - x) - (4a - 1)(3 - x)$$

$$G = (25a^2 + 1 - 10a) - 9a^2$$

$$H = (x - y)^n - 4x(x - y)^{n-1} + y(x - y)^{n-2}$$

Solution

$$A = 9ab - 6a^2 + 12ab^2 = 3a(3b - 2a + 4b^2) = 3a[b(3 + 4b) - 2a]$$

$$B = a^3b^2c - a^2bc + a^5b^3c^2 = a^2bc(ab - 1 + a^3b^2c) = a^2bc[ab(a^2bc + 1) - 1]$$

$$\begin{aligned} C &= 16(a - b) - x^4(a - b) = (a - b)(16 - x^4) = (a - b)(4 + x^2)(4 - x^2) \\ &= (4 + x^2)(2 + x)(2 - x)(a - b) \end{aligned}$$

$$D = 25(x^2 - y^2) + a^2(y^2 - x^2) = (x^2 - y^2)(25 - a^2) = (x + y)(x - y)(5 + a)(5 - a)$$

$$E = 5ax - 5ay - bx + by = x(5a - b) - y(5a - b) = (x - y)(5a - b)$$

$$F = 4a^2(3 - x) - (4a - 1)(3 - x) = (3 - x)(4a^2 - 4a + 1) = (3 - x)(2a - 1)^2$$

$$G = (25a^2 + 1 - 10a) - 9a^2 = (5a - 1)^2 - 9a^2 = (5a - 1 + 3a)(5a - 1 - 3a) = (8a - 1)(2a - 1)$$

$$\begin{aligned} H &= (x - y)^n - 4x(x - y)^{n-1} + y(x - y)^{n-2} = (x - y)^{n-2}[(x - y)^2 - 4x(x - y) + y] \\ &= (x - y)^{n-2}[(x - y)(x - y - 4x) + y] = (x - y)^{n-2}[y - (x - y)(3x + y)] \end{aligned}$$