Baccalauréat C Aix-Marseille [1] juin 1981

EXERCICE 1

Le but de cet exercice est de démontrer par l'absurde qu'il existe une infinité de nombres premiers de la forme $4n-1$, où n est un élément de $\mathbb{N}^*$ (ensemble des entiers naturels non nuls.

1. Soit E l'ensemble des nombres premiers de la forme $4n-1$, où n est élément de $\mathbb{N}^*$.
   Montrer que E a au moins deux éléments.
2. *On suppose* E *fini*. Soit P le produit de tous les éléments de E et $X = 4P-1$.
   a. Trouver un minorant de X.
   b. Montrer que X n'est pas divisible par 2, et en déduire que tout facteur premier de X est soit de la forme $4n+1$, soit de la forme $4n-1$ où n est un élément de $\mathbb{N}^*$.
   c. Montrer que X possède au moins un facteur premier de la forme $4n-1$ où n est un élément de $\mathbb{N}^*$.
3. En considérant un facteur premier p de X de la forme $4n-1$, la définition de P et la relation $X = 4P-1$, achever la démonstration par l'absurde.

EXERCICE 2

Dans un plan affine P rapporté au repère cartésien $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$, soit A et B les points de coordonnées respectives $(-1~;~0)$ et $(0~;~1)$, et soit t un nombre réel non nul.
On désigne par f, g, h les homothéties de rapport t et de centres respectifs O, A, B.
À tout point M du plan P, on fait correspondre successivement les points : $M_1 = f(M)$, $M_2 = g(M_1)$, $M_3 = h(M_2)$ et $M_4 = f(M_3)$.

1. Représenter sur un même figure les points M_1, M_2, M_3, M_4 dans le cas où $t=2$ et $\overrightarrow{\text{O}M} = \vec{\imath} + \vec{\jmath}$.
   (On pourra donner aux représentations de $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ la longueur 0,5 cm).
2. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{\text{O}M_4}$ en fonction de t et des vecteurs $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$.
3. Soit φ_t l'application du plan P dans lui-même définie par :

$$\text{pour tout point } M \text{ de P,}\quad \varphi_t(M) = f\circ h\circ g\circ f(M).$$

   Déterminer suivant les valeurs de t l'ensemble des points de P invariants par φ_t et préciser dans chaque cas la nature de φ_t.

PROBLÈME

On notera $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels, $\mathbb{N}^*$ l'ensemble des entiers naturels non nuls, $\mathbb{N}'$ l'ensemble des entiers naturels privés des nombres 0 et 1.

Partie A

On considère les suites u et v définies sur $\mathbb{N}^*$ par

$$\left\{\begin{array}{l c l} u_1 & = & 1\\ v_1 & = & 1\end{array}\right. \text{ et, pour tout } n\text{, élément de } \mathbb{N}' \left\{\begin{array}{l c l} u_n & = & \dfrac{1}{1^2}+\dfrac{1}{2^2}+\cdots+\dfrac{1}{n^2}\\ v_n & = & 1+\dfrac{1}{1\times 2}+\dfrac{1}{2\times 3}+\cdots+\dfrac{1}{(n-1)n}\end{array}\right.$$

1. Nice - Corse - Montpellier - Toulouse

1. Trouver deux réels A et B tels que, pour tout n, élément de $\mathbb{N}'$

$$\frac{1}{(n-1)n} = \frac{A}{n-1} + \frac{B}{n}.$$

En déduire que, pour tout n, élément de $\mathbb{N}'$,

$$v_n = 2 - \frac{1}{n}.$$

2. Montrer que la suite u est croissante, que, pour tout n, élément de $\mathbb{N}'$: $u_n \leqslant v_n$, que la suite u est majorée.

Partie B

On rappelle que si q est un nombre complexe différent de 1 et n un élément de $\mathbb{N}$

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

1. Soit t un élément de $[0 ; \pi]$; on pose pour n, élément de $\mathbb{N}'$

$$C_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \cos kt \quad \text{et} \quad S_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \sin kt.$$

a. Calculer le nombre complexe $C_n(t) + \mathrm{i}S_n(t)$.
En déduire que si t est un élément de $]0 ; \pi]$

$$C_n(t) = \frac{\sin \frac{nt}{2} \cos \frac{n+1}{2} t}{\sin \frac{t}{2}}$$

et si $t = 0$, $\quad C_n(0) = n$.

b. L'application C_n de $[0 ; \pi]$ dans $\mathbb{N}$ est-elle continue sur $[0 ; \pi]$.

2. Vérifier que pour tout t, élément de $]0 ; \pi]$:

$$1 + 2C_n(t) = \frac{\sin \frac{2n+1}{2} t}{\sin \frac{t}{2}}$$

et montrer que l'application de $]0 ; \pi]$ dans $\mathbb{R}$ qui à t associe $\dfrac{\sin \frac{2n+1}{2} t}{\sin \frac{t}{2}}$ peut être prolongée en une fonction g_n continue sur $[0 ; \pi]$.

3. Montrer que pour tout n, élément de $\mathbb{N}^*$,

$$\int_0^{\pi} \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) \cos nt \, \mathrm{d}t = \frac{1}{n^2}.$$

En déduire que

$$u_n = \int_0^{\pi} \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) C_n(t) \, \mathrm{d}t.$$

4. Vérifier que

$$\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left(t-\frac{t^2}{2\pi}\right)\mathrm{d}t=\frac{\pi^2}{6}.$$

et que, pour tout n, élément de $\mathbb{N}^*$:

$$\frac{\pi^2}{6}-u_n=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left(t-\frac{t^2}{2\pi}\right)g_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

Partie C

On considère la fonction numérique f définie sur $[0\,;\,\pi]$ par $f(0)=2$ et pour tout t, élément de $]0\,;\,\pi]$

$$f(t)=\frac{t-\dfrac{t^2}{2\pi}}{\sin\dfrac{t}{2}}.$$

1. Montrer que f est continue sur $[0\,;\,\pi]$; en déduire l'existence d'un réel M tel que, pour tout t, élément de $[0\,;\,\pi]$:

$$0\leqslant f(t)\leqslant M.$$

2. Soit α un réel fixé tel que $0<\alpha<\pi$.

a. Montrer que, pour tout n, élément de $\mathbb{N}$,

$$\left|\int_0^{\alpha}f(t)\sin\frac{2n+1}{2}t\,\mathrm{d}t\right|\leqslant\alpha M.$$

b. Montrer que f est dérivable sur $[\alpha\,;\,\pi]$ et que la fonction dérivée f' est continue sur ce segment.

En déduire l'existence d'un réel M' tel que, pour tout t, élément de $[\alpha\,;\,\pi]$ $f'(t)\leqslant M'$.

c. On pose, pour tout n, élément de $\mathbb{N}$,

$$I_n=\int_{\alpha}^{\pi}f(t)\sin\frac{2n+1}{2}t\,\mathrm{d}t.$$

Montrer en utilisant une intégration par parties, que

$$\lim_{n\to+\infty}I_n=0.$$

3. Déduire de la question C 2. que

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=\frac{\pi^2}{6}.$$