Baccalauréat série C - 1981 - Aix Marseille

Exercice 1

1. Pour $n = 1$, $4n - 1 = 3$ qui est bien un nombre premier, donc élément de E
Pour $n = 2$, $4n - 1 = 7$ qui est également un nombre premier.

Donc E a au moins 2 éléments, 3 et 7.

2.
a. 3 et 7 sont les plus petits éléments de E, puisqu'ils ont été obtenus à partir des premiers éléments de $\mathbb{N}^*$.

On a donc $P \geqslant 21$

Et donc $X \geqslant 83$

b. Par construction, $4P$ est pair. Ainsi $X = 4P - 1$ est impair.

Ce qui signifie bien que X n'est pas divisible par 2.

Puisque X est impair, ses facteurs premiers le sont forcément également.

Ainsi, les facteurs premiers de X sont forcément de la forme $4n - 1$ ou $4n + 1$, $n \in \mathbb{N}^*$

<u>Remarque :</u> pour le vérifier, il suffit d'étudier la forme des nombres dans la table des 4, donc $4n + k,\ k \in \{0; 1; 2; 3\}$

c. Supposons par l'absurde que X ne comportent que des facteurs premiers de la forme $4n + 1,\ n \in \mathbb{N}^*$

En développant le produit de ces facteurs, on obtient forcément un nombre de la forme $4N + 1$.

Ainsi, X possède au moins un facteur premier de la forme $4n - 1,\ n \in \mathbb{N}^*$.

3. Considérons donc p un facteur premier de X de la forme $4n - 1,\ n \in \mathbb{N}^*$
Ainsi $p \mid X$.

De plus, par définition de P, on a $p \mid P$.
En reprenant la définition de X, on peut écrire $p \mid 4P - 1$

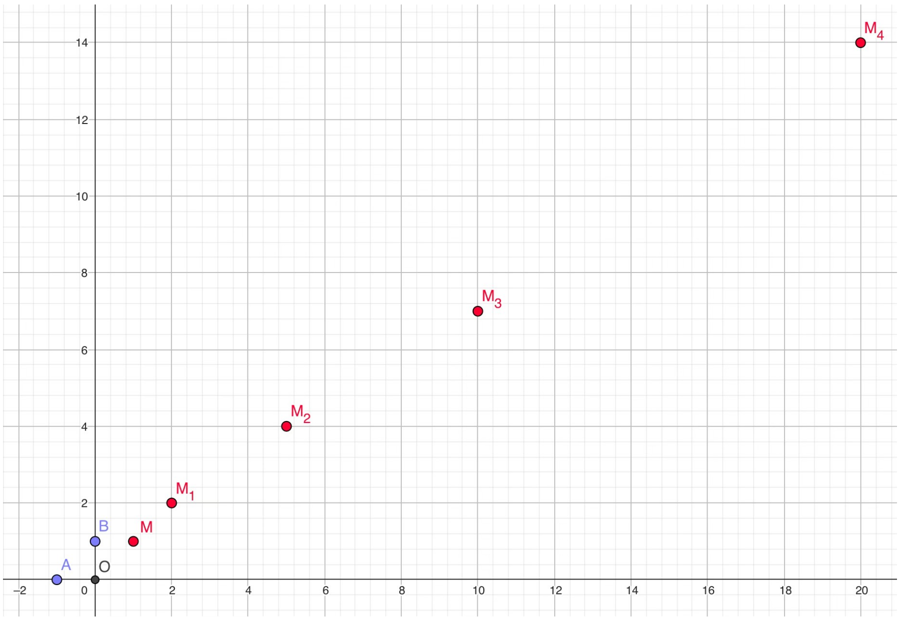
D'après le théorème de Gauss, cela implique que $p \mid 1$, ce qui est absurde car $p \geqslant 3$!

On conclut donc que l'hypothèse que E soit fini est absurde.

Ou autrement, l'ensemble des nombres premiers de la forme $4n - 1,\ n \in \mathbb{N}^*$ est infini.

Exercice 2

1. Voici la figure des 4 points construits :



2. Soit $t \in \mathbb{R}$ et $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j},\ (x, y) \in \mathbb{R}^2$

Procédons par étape pour trouver les coordonnées des points :

<u>Application de f</u>

$\overrightarrow{OM_1} = t\overrightarrow{OM} = tx\overrightarrow{i} + ty\overrightarrow{j}$

<u>Application de g</u>

$\overrightarrow{AM_2} = t\overrightarrow{AM_1} = t\left((tx+1)\overrightarrow{i} + ty\overrightarrow{j}\right) = \left(t^2x + t\right)\overrightarrow{i} + t^2y\overrightarrow{j}$

Et donc $\overrightarrow{OM_2} = \left(t^2x + t - 1\right)\overrightarrow{i} + t^2y\overrightarrow{j}$

<u>Application de h</u>

$\overrightarrow{BM_3} = t\overrightarrow{BM_2} = t\left(\left(t^2x + t - 1\right)\overrightarrow{i} + \left(t^2y - 1\right)\overrightarrow{j}\right) = \left(t^3x + t^2 - t\right)\overrightarrow{i} + \left(t^3y - t\right)\overrightarrow{j}$

D'où $\overrightarrow{OM_3} = \left(t^3x + t^2 - t\right)\overrightarrow{i} + \left(t^3y - t + 1\right)\overrightarrow{j}$

<u>Application de f</u>

$\overrightarrow{OM_4} = t\overrightarrow{OM_3} = t\left(\left(t^3x + t^2 - t\right)\overrightarrow{i} + \left(t^3y - t + 1\right)\overrightarrow{j}\right) = \left(t^4x + t^3 - t^2\right)\overrightarrow{i} + \left(t^4y - t^2 + t\right)\overrightarrow{j}$

Et donc $\overrightarrow{OM_4} = \left(t^4x + t^3 - t^2\right)\overrightarrow{i} + \left(t^4y - t^2 + t\right)\overrightarrow{j}$

3. Les points fixes de φ_t sont les points tels que $M_4 = M$

Ou $\left(t^4x + t^3 - t^2\right)\overrightarrow{i} + \left(t^4y - t^2 + t\right)\overrightarrow{j} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}$

Ce qui donne le système $\begin{cases} t^4x + t^3 - t^2 = x \\ t^4y - t^2 + t\ = y \end{cases}$

On va considérer $t \neq 0$, sinon le seul point fixe est O.

Regardons chacune des équations séparément. Commençons par x :
$t^4x + t^3 - t^2 = x \Leftrightarrow x\left(1 - t^4\right) = t^3 - t^2$

Considérons également $t \neq 1$, cas dans lequel tous les points sont fixes.

Or $t^3 - t^2 = t^2(t-1)$
Et $1 - t^4 = \left(1 - t^2\right)\left(1 + t^2\right) = (1-t)(1+t)\left(1+t^2\right)$

Donc $x\left(1 - t^4\right) = t^3 - t^2 \Rightarrow x = \dfrac{t^2(t-1)}{(1-t)(1+t)\left(1+t^2\right)}$

Et finalement $x = \dfrac{-t^2}{(1+t)\left(1+t^2\right)}$

Étudions maintenant y, toujours avec $t \neq 0$ et $t \neq 1$:
$t^4y - t^2 + t = y \Leftrightarrow y\left(t^4 - 1\right) = t^2 - t$

De la même façon que ci-dessus, on trouve $y = \dfrac{t(t-1)}{(t-1)(t+1)\left(t^2+1\right)} = \dfrac{t}{(t+1)\left(t^2+1\right)}$

Pour $t \neq 0$ et $t \neq 1$, φ_t possède un point fixe $\Omega\left(\dfrac{-t^2}{(1+t)\left(1+t^2\right)};\dfrac{t}{(t+1)\left(t^2+1\right)}\right)$

φ_t est alors une homothétie de centre Ω et de rapport t^4.

Problème

Partie A

1. Soit $n \in \mathbb{N}'$.

On a $\dfrac{A}{n-1} + \dfrac{B}{n} = \dfrac{An + B(n-1)}{n(n-1)} = \dfrac{(A+B)n - B}{n(n-1)}$

On cherche donc $\dfrac{(A+B)n - B}{n(n-1)} = \dfrac{1}{n(n-1)}$

Par identification, on doit trouver $\begin{cases} A + B = 1 \\ B = -1 \end{cases}$

Ce qui donne finalement $\boxed{\dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{n(n-1)}}$

On peut écrire $v_n = 1 + \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\left(k-1\right)} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right)$

Par téléscopage, on trouve $v_n = 1 + 1 - \dfrac{1}{n}$.

Et donc, on confirme que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}',\ v_n = 2 - \dfrac{1}{n}}$

2. Pour étudier les variations de u, nous allons calculer $u_{n+1} - u_n$:

$$u_{n+1} - u_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{(n+1)^2} \geqslant 0$$

Et donc u est croissante.

Comparons maintenant v_n et u_n :

Pour chaque terme de la somme (à part le 1er qui est 1 pour les 2) on a $\dfrac{1}{k\left(k-1\right)} \geqslant \dfrac{1}{k^2}$

Et donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}',\ u_n \leqslant v_n}$

Comme de plus $\forall n \in \mathbb{N}',\ v_n \leqslant 2$.

On conclut finalement que u est majorée.

Partie B

1.

a. $C_n(t) + iS_n(t) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos\left(kt\right) + i \sum_{k=1}^{n} \sin\left(kt\right) = \sum_{k=1}^{n} \cos\left(kt\right) + i\sin\left(kt\right) = \sum_{k=1}^{n} e^{ikt}$

<u>Pour $t \neq 0$</u>

$$C_n(t) + iS_n(t) = e^{it} \sum_{k=0}^{n-1} e^{ikt} = e^{it} \sum_{k=0}^{n-1} \left(e^{it}\right)^k = e^{it} \frac{1 - e^{int}}{1 - e^{it}}$$

Attention : la formule rappelée dans l'énoncé ne fonctionne que si la somme part de q^0, ce qui n'était pas notre cas. Ici, il faut factoriser par le premier terme pour pouvoir appliquer la formule ensuite.

Donc $C_n(t) + iS_n(t) = e^{it}\dfrac{1-e^{int}}{1-e^{it}} = e^{it}\dfrac{e^{i\frac{n}{2}t}\left(e^{-i\frac{n}{2}t} - e^{i\frac{n}{2}t}\right)}{e^{i\frac{t}{2}}\left(e^{-i\frac{t}{2}} - e^{i\frac{t}{2}}\right)}$

Rappel : on reconnaît ici la formule $\sin(\alpha) = \dfrac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}$. Il y a une formule pour $\cos(\alpha)$ que je te laisse retrouver si besoin.

On trouve donc (je passe une étape de simplification par $-2i$ au numérateur et au dénominateur et le regroupement des exponentielles) :

$$C_n(t) + iS_n(t) = e^{i\frac{n+1}{2}t}\frac{\sin\left(\frac{n}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$$

Et donc pour $t \neq 0$, $C_n(t) + iS_n(t) = e^{i\frac{n+1}{2}t}\dfrac{\sin\left(\frac{n}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$ et $C_n(0) + iS_n(O) = n$

Remarque : je n'insiste par pour $t = 0$, tous les $\cos(kt)$ valent 1 et les $\sin(kt)$ valent 0

b. En repartant de l'expression ci-dessus, on peut écrire :

$$C_n(t) + iS_n(t) = \frac{\sin\left(\frac{n}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\left(\cos\left(\frac{n+1}{2}t\right) + i\sin\left(\frac{n+1}{2}t\right)\right)$$

$C_n(t)$ étant la partie réelle de cette expression, on trouve bien (en tenant compte de $C_n(0)$ évoqué ci-dessus)

On a donc $\forall t \in \left]0;\pi\right],\ C_n(t) = \dfrac{\sin\left(\frac{n}{2}t\right)\cos\left(\frac{n+1}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$ et $C_n(0) = n$

c. Quand $t \to 0$, $\cos\left(\dfrac{n+1}{2}t\right) \to 1$ et par ailleurs, $\sin\left(\dfrac{n}{2}t\right) \sim \dfrac{n}{2}t$ et $\sin\left(\dfrac{t}{2}\right) \sim \dfrac{t}{2}$

Et donc $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{\sin\left(\frac{n}{2}t\right)\cos\left(\frac{n+1}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} = n$

Ainsi, l'application C_n est continue sur $\left[0;\pi\right]$

2. $\forall t \in \left]0;\pi\right],\ 1 + 2C_n(t) = 1 + \dfrac{2\sin\left(\frac{n}{2}t\right)\cos\left(\frac{n+1}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} = \dfrac{\sin\left(\frac{t}{2}\right) + 2\sin\left(\frac{n}{2}t\right)\cos\left(\frac{n+1}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$

Or $\sin\left(\frac{t}{2}\right) = \sin\left(\frac{n+1}{2}t\right)\cos\left(\frac{n}{2}t\right) - \cos\left(\frac{n+1}{2}t\right)\sin\left(\frac{n}{2}t\right)$
Et $\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right) = \cos\left(\frac{n+1}{2}t\right)\sin\left(\frac{n}{2}t\right) + \sin\left(\frac{n+1}{2}t\right)\cos\left(\frac{n}{2}t\right)$

Donc $\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right) = \sin\left(\frac{t}{2}\right) + 2\sin\left(\frac{n}{2}t\right)\cos\left(\frac{n+1}{2}t\right)$

$\boxed{\text{Et finalement on a bien } \forall t \in \left]0;\pi\right],\ 1 + 2C_n(t) = \dfrac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}}$

En utilisant la même équivalence en 0 que pour la question précédente, on obtient que
$\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} = 2n+1$

$\boxed{\text{Et donc, on peut prolonger } 1 + 2C_n \text{ une fonction } g_n \text{ continue sur } \left[0;\pi\right] \text{ en posant } g_n(0) = 2n+1}$

3. Nous allons procéder à une intégration par parties (et même 2, le but étant de réduire le degré du polynôme)

$$\int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)\cos(nt)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n}\left[\left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)\sin(nt)\right]_0^\pi - \frac{1}{n}\int_0^\pi \left(\frac{t}{\pi} - 1\right)\sin(nt)\,\mathrm{d}t$$

$= -\dfrac{1}{n}\displaystyle\int_0^\pi \left(\frac{t}{\pi} - 1\right)\sin(nt)\,\mathrm{d}t$ (l'expression dans le crochet valant 0 en 0 et π)

Et

$$-\frac{1}{n}\int_0^\pi \left(\frac{t}{\pi} - 1\right)\sin(nt)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n^2}\left[\left(\frac{t}{\pi} - 1\right)\cos(nt)\right]_0^\pi - \frac{1}{n^2}\int_0^\pi \frac{1}{\pi}\cos(nt)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{\pi n^3}\left[\sin(nt)\right]_0^\pi = \frac{1}{n^2}$$

$\boxed{\text{Donc } \displaystyle\int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)\cos(nt)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n^2}}$

Par définition de u et avec le résultat précédent, on a : $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^n \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)\cos(kt)\,\mathrm{d}t$
Et par linéarité de l'intégrale (qui ne pose pas de souci pour une somme finie) :
$u_n = \displaystyle\int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)\sum_{k=1}^n \cos(kt)\,\mathrm{d}t$

$\boxed{\text{Et donc, par définition de } C_n,\ u_n = \displaystyle\int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)C_n(t)\,\mathrm{d}t}$

4. $\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^\pi t - \frac{t^2}{2\pi}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left[\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{6\pi}\right]_0^\pi = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{2} - \frac{\pi^3}{6\pi}\right) = \frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi^2}{12} = \frac{2\pi^2}{12}$

$\boxed{\text{Et donc } \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^\pi t - \frac{t^2}{2\pi}\mathrm{d}t = \frac{\pi^2}{6}}$

D'après la question précédente, on peut écrire $-u_n = \int_0^{\pi} \left(t - \frac{t^2}{2\pi} \right) C_n(t)\,\mathrm{d}t$

Donc $\frac{\pi^2}{6} - u_n = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} t - \frac{t^2}{2\pi} \mathrm{d}t + \int_0^{\pi} \left(t - \frac{t^2}{2\pi} \right) C_n(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} t - \frac{t^2}{2\pi} + 2\left(t - \frac{t^2}{2\pi} \right) C_n(t)\,\mathrm{d}t$

$= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \left(t - \frac{t^2}{2\pi} \right) \left(1 + 2C_n(t) \right) \mathrm{d}t$

Et finalement, $\frac{\pi^2}{6} - u_n = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \left(t - \frac{t^2}{2\pi} \right) g_n(t)\,\mathrm{d}t$

Partie C

1. $\forall t \in \left]0;\pi\right],\ f(t) = \dfrac{t - \frac{t^2}{2\pi}}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$

Pour vérifier la continuité en 0, nous allons une nouvelle fois utiliser l'équivalence en $\sin\left(\frac{t}{2}\right) \sim \frac{t}{2}$

Et donc $f(t) \sim \dfrac{t - \frac{t^2}{2\pi}}{\frac{t}{2}} = 2 - \frac{t}{\pi}$, ce qui confirme que $\lim_{t \to 0} f(t) = 2$

Ainsi f est continue sur $\left[0;\pi\right]$

Sur un intervalle fermé, une fonction continue est bornée et atteint ses bornes, ce qui nous assure l'existence d'un $M \geqslant 2$ tel que $\forall t \in \left[0;\pi\right],\ f(t) \leqslant M$

De plus, $\forall t \in \left[0;\pi\right],\ \sin\left(\frac{t}{2}\right) \leqslant \frac{t}{2}$ et donc

$\forall t \in \left[0;\pi\right],\ f(t) \geqslant \dfrac{t - \frac{t^2}{2\pi}}{\frac{t}{2}} = 2 - \frac{t}{\pi} \geqslant 2 - \frac{\pi}{\pi} = 1$

Finalement, il existe un $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall t \in \left[0;\pi\right],\ 0 \leqslant f(t) \leqslant M$

2. On considère $0 < \alpha < \pi$

a. En utilisant l'inégalité triangulaire, on a, pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$\left| \int_0^{\alpha} f(t) \sin\left(\frac{2n+1}{2} t \right) \mathrm{d}t \right| \leqslant \int_0^{\alpha} \left| f(t) \sin\left(\frac{2n+1}{2} t \right) \right| \mathrm{d}t$$

Et $\forall t \in \left[0;\alpha\right],\ \left| f(t) \sin\left(\frac{2n+1}{2} t \right) \right| = \left| f(t) \right| \left| \sin\left(\frac{2n+1}{2} t \right) \right| \leqslant M$

Et donc $\int_0^{\alpha} \left| f(t) \sin\left(\frac{2n+1}{2} t \right) \right| \mathrm{d}t \leqslant \int_0^{\alpha} M\mathrm{d}t = \alpha M$

On conclut donc $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left| \int_0^{\alpha} f(t) \sin\left(\frac{2n+1}{2} t\right) \mathrm{d}t \right| \leqslant \alpha M$

b. f est dérivable sur $[\alpha; \pi]$ comme quotient de fonctions qui le sont et dont le dénominateur ne s'annule pas sur le segment considéré.

$$\forall t \in [\alpha; \pi],\ f'(t) = \frac{\left(1 - \frac{t}{\pi}\right) \sin\left(\frac{t}{2}\right) - \frac{1}{2} \cos\left(\frac{t}{2}\right) \left(t - \frac{t^2}{2\pi}\right)}{\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}$$

Pas besoin d'aller plus loin, tous les membres du numérateur sont continus et le dénominateur l'est également et ne s'annule pas.
On va donc pouvoir appliquer le théorème des bornes atteintes.

Ceci nous assure qu'il existe un réel M' tel que $\forall t \in [\alpha; \pi],\ f'(t) \leqslant M'$

c. $I_n = \int_{\alpha}^{\pi} f(t) \sin\left(\frac{2n+1}{2} t\right) \mathrm{d}t = \frac{-2}{2n+1} \left[f(t) \cos\left(\frac{2n+1}{2} t\right) \right]_{\alpha}^{\pi} + \frac{2}{2n+1} \int_{\alpha}^{\pi} f'(t) \cos\left(\frac{2n+1}{2} t\right) \mathrm{d}t$

$= \frac{2}{2n+1} f(\alpha) \cos\left(\frac{2n+1}{2} \alpha\right) + \frac{2}{2n+1} \int_{\alpha}^{\pi} f'(t) \cos\left(\frac{2n+1}{2} t\right) \mathrm{d}t$

$= \frac{2}{2n+1} \left(f(\alpha) \cos\left(\frac{2n+1}{2} \alpha\right) + \int_{\alpha}^{\pi} f'(t) \cos\left(\frac{2n+1}{2} t\right) \mathrm{d}t \right)$

Par la même méthode que dans la question a, on peut borner $\left| \int_{\alpha}^{\pi} f'(t) \cos\left(\frac{2n+1}{2} t\right) \mathrm{d}t \right|$ et affirmer qu'il existe un réel K tel que :

$$\left| f(\alpha) \cos\left(\frac{2n+1}{2} \alpha\right) + \int_{\alpha}^{\pi} f'(t) \cos\left(\frac{2n+1}{2} t\right) \mathrm{d}t \right| \leqslant K$$

Et donc $\left| I_n \right| \leqslant \frac{2}{2n+1} K$

<u>Remarque :</u> je me suis permis cette rédaction abrégée, car le principe est vraiment le même que dans la question précédente, mais il faut introduire d'autres bornes car f' n'est pas minorée par 0 contrairement à f. Ça alourdirait une rédaction d'un problème qui est déjà bien assez long. Si tu en es là, je ne pas qu'on puisse t'en tenir rigueur.

Ceci permet bien de conclure que $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = 0$

3. En utilisant les 2 résultats principaux de la question 2 et à partir de la relation de Chasles, on obtient :

$\forall \alpha \in \left]0; \pi\right[, \forall n \in \mathbb{N}, \quad \left| \int_0^{\pi} f(t) \sin\left(\frac{2n+1}{2} t\right) \mathrm{d}t \right| = \left| \int_0^{\alpha} f(t) \sin\left(\frac{2n+1}{2} t\right) \mathrm{d}t + \int_{\alpha}^{\pi} f(t) \sin\left(\frac{2n+1}{2} t\right) \mathrm{d}t \right|$

$\leqslant \left| \int_0^{\alpha} f(t) \sin\left(\frac{2n+1}{2} t\right) \mathrm{d}t \right| + \left| \int_{\alpha}^{\pi} f(t) \sin\left(\frac{2n+1}{2} t\right) \mathrm{d}t \right| \leqslant \alpha M + \left| I_n \right|$

Et donc, en faisant tendre α vers 0, on obtient que $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_0^{\pi} f(t) \sin\left(\frac{2n+1}{2} t\right) \mathrm{d}t = 0$

De plus, on peut écrire :

$$\forall t \in [0;\pi],\ f(t)\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right) = \frac{t-\frac{t^2}{2\pi}}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right) = \left(t-\frac{t^2}{2\pi}\right)\frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$$

$$= \left(t-\frac{t^2}{2\pi}\right)g_n(t)$$

Et donc $\displaystyle\int_0^\pi f(t)\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)\mathrm{d}t = \int_0^\pi \left(t-\frac{t^2}{2\pi}\right)g_n(t)\,\mathrm{d}t$

Ce qui nous donne $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^\pi \left(t-\frac{t^2}{2\pi}\right)g_n(t)\,\mathrm{d}t = 0$

Comme d'après la question B.4 on a $\displaystyle\frac{\pi^2}{6}-u_n = \frac{1}{2}\int_0^\pi \left(t-\frac{t^2}{2\pi}\right)g_n(t)\,\mathrm{d}t$, on déduit que

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\pi^2}{6}-u_n = 0$$

Ce qu'on réécrit en $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty}u_n = \frac{\pi^2}{6}}$