Baccalauréat spé math 2024 - sujet 0

Exercice 1

Partie 1

1. u est définie par $\forall x \in \mathbb{R},\ u(x) = xe^{-x}$
u est bien définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ u'(x) = e^{-x} - xe^{-x}$

On a donc $\forall x \in \mathbb{R},\ u'(x) + u(x) = e^{-x} - xe^{-x} + xe^{-x} = e^{-x}$

Ce qui confirme que u est bien une solution de (E)

2. On peut écrire l'équation sous la forme $(E') : y' = -y$

<u>Rappel :</u> Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay,\ a \in \mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto Ce^{ax},\ C \in \mathbb{R}$

En utilisant le rappel de cours ci-dessus, on trouve que :

Les solutions de (E') sont les fonctions $x \mapsto Ce^{-x},\ C \in \mathbb{R}$

3. On va utiliser les 2 résultats précédents pour déduire l'ensemble des résultats de (E)

<u>Rappel :</u> les solutions d'une équation différentielle avec second membre sont composées de la somme d'une solution de l'équation homogène associée (second membre nul, question 2) et d'une solution particulière de l'équation (question 1). (Je ne reprends pas le cours en détail ici, n'hésite pas à te référer à ton cours ou aux nombreuses ressources en ligne disponible !)

Les solutions de (E) sont les fonctions $x \mapsto xe^{-x} + Ce^{-x} = (x + C)e^{-x},\ C \in \mathbb{R}$

N'hésitons pas à vérifier !
En notant f_c la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R},\ f_c(x) = xe^{-x} + Ce^{-x}$, on a
$\forall x \in \mathbb{R}, f_c'(x) = e^{-x} - xe^{-x} - Ce^{-x}$

Ce qui nous donne bien $\forall x \in \mathbb{R}, f_c'(x) + f_c(x) = e^{-x} - xe^{-x} - Ce^{-x} + xe^{-x} + Ce^{-x} = e^{-x}$

4. On sait donc que g va être de la forme $g(x) = xe^{-x} + Ce^{-x}$

Cela donne $g(0) = C$
Or par hypothèse $g(0) = 2$

Et donc g est définie par $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = (x + 2)e^{-x}$

Partie 2

1. On peut s'appuyer sur 2 points clé de la fonction h :
   - $\forall x \in \mathbb{R},\ e^x > 0$ (donc évidemment e^{-x} également)
   - h est strictement décroissante (je te laisse vérifier si besoin en la dérivant)

On peut donc conclure que C est la courbe en trait plein.

©antoine.remond.maths@gmail.com

2. On va identifier la courbe C_k en utilisant la valeur prise par la fonction f_k en 0

On trouve que $f_k(0) = k$

On sait par ailleurs que $h(0) = 1$

Or, d'après la représentation graphique, C_k passe par le point $(0; 2)$.

On déduit donc que $k = 2$

Exercice 2

Partie 1

1.

a. On considère F_1 définie par $\forall x \in [0; 1]$, $F_1(x) = (x-1)e^x$

F_1 est bien dérivable sur $[0; 1]$ (et sur $\mathbb{R}$ d'ailleurs) comme produit de fonctions qui le sont et $F_1'(x) = e^x + (x-1)e^x = xe^x = f_1(x)$

Cela confirme que F_1 est une primitive de f_1

b. Nous allons utiliser le résultat précédent :

$$I_1 = \int_0^1 xe^x \mathrm{d}x = \int_0^1 f_1(x)\,\mathrm{d}x = [F_1(x)]_0^1 = [(x-1)e^x]_0^1 = 0 - (-1)$$

Et donc $I_1 = 1$

2. On considère $n \geqslant 1$

$$I_{n+1} = \int_0^1 x^{n+1}e^x \mathrm{d}x$$

Procédons à une intégration par parties comme suggéré par l'énoncé

$$I_{n+1} = \int_0^1 x^{n+1}e^x \mathrm{d}x = [x^{n+1}e^x]_0^1 - \int_0^1 (n+1)x^n e^x \mathrm{d}x = e - (n+1)\int_0^1 x^n e^x \mathrm{d}x$$

Et finalement, on a bien $I_{n+1} = e - (n+1)I_n$

3. Utilisons les résultats des 2 questions précédentes pour trouver $I_2 = e - 2I_1$

Et donc $I_2 = e - 2$

4. On reconnaît dans la boucle for la relation permettant de calculer I_{n+1} en fonction de I_n et l'initialisation avec 1 qui est bien la valeur de I_1.

On note de plus qu'on initialise une liste dans laquelle on vient ajouter le dernier résultat calculé dans chaque boucle.

Donc mystere(5) retourne une liste avec les valeurs de I_1 à I_5.

©antoine.remond.maths@gmail.com

Partie 2

1.
a. I_n correspond à l'air entre l'axe des abscisses et la courbe sur l'intervalle $[0;1]$

b. D'après les courbes représentées, on peut conjecturer que (I_n) va tendre vers 0.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in [0;1]$, on a $f_n(x) \geqslant 0$
On peut donc en conclure que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ I_n \geqslant 0$

Pour l'autre l'inégalité, on remarque que $\forall x \in [0;1],\ e^x \leqslant e$.
On peut donc écrire $I_n = \int_0^1 x^n e^x \mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 x^n e \mathrm{d}x = e\int_0^1 x^n \mathrm{d}x$

$$\boxed{\text{Et on conclut } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant I_n \leqslant e\int_0^1 x^n \mathrm{d}x}$$

3. Nous pouvons calculer facilement le membre à droite de l'inégalité :

$$e\int_0^1 x^n \mathrm{d}x = e\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{e}{n+1}$$

On peut donc réécrire l'inégalité : $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{e}{n+1}$

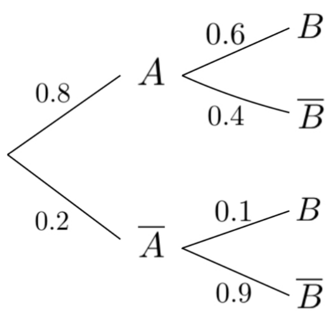
Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{e}{n+1} = 0$, on peut appliquer le théorème des gendarmes.

$$\boxed{\text{On conclut donc que } \lim_{n\to+\infty} I_n = 0}$$

Exercice 3

Partie 1

1. En prenant en compte les probabilités données et en calculant celles des événements contraires, on trouve :



©antoine.remond.maths@gmail.com

2. On lit sur l'arbre la probabilité de répondre correctement aux 2 questions (donc de répondre correctement à la question 1, puis correctement à la question 2) que nous noterons $P(A \cap B)$:

$P(A \cap B) = 0.8 \times 0.6 = 0.48$

La probabilité qu'un candidat réponde correctement à Q1 et Q2 est de $48\,\%$

3. Pour calculer la probabilité $P(B)$, nous utilisons la formule des probabilités totales :

$P(B) = P(A \cap B) + P\left(\overline{A} \cap B\right) = 0.48 + 0.2 \times 0.1 = 0.48 + 0.02 = 0.5$

La probabilité qu'un candidat réponde correctement à la question Q2 est de $50\,\%$.

4. Il n'y a que 2 résultats possible, 1 point en cas de bonne réponse ou 0 pour les autres cas.
En écrivant la formule pour le premier calcul : $E\left(X_1\right) = 0.8 \times 1 + 0.2 \times 0 = 0.8$

<u>Rappel :</u> Pour une loi X qui à une valeur x_i associe une probabilité p_i, pour i entier entre 1 et n.

formule de l'espérance : $E(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$

formule de la variance : $V(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i \left(x_i - E(X)\right)^2$

On trouve de la même façon : $E\left(X_2\right) = 0.5$

Et on déduit : $E(X) = 1.3$

On conclut donc $E\left(X_1\right) = 0.8$, $E\left(X_2\right) = 0.5$ et $E(X) = 1.3$

L'espérance de X correspond à la note moyenne des candidats pour les 2 questions considérées.

5.
a. $X = 0$ correspond à 2 mauvaises réponses.
On a donc : $P(X = 0) = P\left(\overline{A}\right) \times P\left(\overline{B}\right) = 0.2 \times 0.9 = 0.18$

$P(X = 0) = 0.18$

$X = 2$ correspond à l'inverse à 2 bonnes réponses.
D'où $P(X = 2) = P(A) \times P(B) = 0.8 \times 0.6 = 0.48$

$P(X = 2) = 0.48$

On a $P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = 1$
D'où $P(X = 1) = 1 - P(X = 0) - P(X = 2)$

Et donc $P(X = 1) = 1 - 0.18 - 0.48 = 0.34$

<u>Remarque :</u> on peut vérifier ce résultat en calculant directement
$P(X = 1) = P\left(A \cap \overline{B}\right) + P\left(\overline{A} \cap B\right) = 0.8 \times 0.4 + 0.2 \times 0.1 = 0.34$

b. Calculons d'abord l'espérance de X.
$E(X) = 0 \times 0.18 + 1 \times 0.34 + 2 \times 0.48 = 1.3$

<u>Remarque :</u> boulette de ma part, j'ai oublié qu'on l'avait en fait calculée juste avant ! Je laisse le calcul, on ne s'exerce jamais trop sur ces chapitres probabilités et statistiques !

©antoine.remond.maths@gmail.com

On peut donc calculer la variance, avec la formule rappelée :
$V(X) = 0.18(0-1.3)^2 + 0.34(1-1.3)^2 + 0.48(2-1.3)^2 = 0.57$

On confirme bien que la variance de X vaut 0.57

c. On va calculer les variances de X_1 et X_2 :
$V(X_1) = 0.8(1-0.8)^2 + 0.2(0-0.8)^2 = 0.16$
Et $V(X_2) = 0.5(1-0.5)^2 + 0.5(1-0.5)^2 = 0.25$

On a $V(X) \neq V(X_1) + V(X_2)$. Ce résultat n'est pas surprenant car les 2 lois ne sont pas indépendantes (les événements Q_1 et Q_2 ne le sont pas).

Partie 2

1. Les réponses aux questions suivent une loi de Bernoulli de paramètre $p = \frac{3}{4}$

De plus, la réponse à chaque question est considérée comme indépendante des autres.

Cela confirme que Y est une loi binomiale de paramètres $p = \frac{3}{4}$ et $n = 8$.

2. Y étant une loi binomiale,

On déduit $P(Y=8) = \left(\frac{3}{4}\right)^8 = \frac{6561}{65536}$

3. On va utiliser les formules du cours sur les lois binomiales

Rappel : pour une loi binomiale X de paramètres p et n, on a :
Espérance : $E(X) = np$
Variance : $V(X) = np(1-p)$

Ainsi $E(Y) = 8 \times \frac{3}{4} = 6$ et $V(Y) = 8 \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{2}$

Partie 3

1. L'espérance étant linéaire, on a $E(Z) = E(X) + E(Y)$

Avec les résultats précédents, on obtient $E(Z) = 1.3 + 6 = 7.3$

Comme X et Y sont indépendantes, on a également $V(Z) = V(X) + V(Y)$

Ce qui nous donne $V(Z) = 0.57 + 1.5 = 2.07$

2.
a. On utilise une nouvelle fois la linéarité de l'espérance et

$$E(M_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(Z_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(Z) = E(Z)$$

$\boxed{\text{Et donc } E\left(M_n\right) = 7.3}$

b. Pour trouver l'écart-type de M_n, il faut d'abord calculer la variance.
Rappel : *pour un variable aléatoire X, on a $V\left(aX+b\right) = a^2 V(X)$, pour a et b 2 réels.*

On a donc

$$V\left(M_n\right) = V\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i\right) = \frac{1}{n^2} V\left(\sum_{i=1}^{n} Z_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} V\left(Z_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} V(Z) = \frac{V(Z)}{n} = \frac{2.07}{n}$$

Finalement, l'écart-type vaut donc $\sigma\left(M_n\right) = \sqrt{V\left(M_n\right)} = \sqrt{\frac{2.07}{n}}$

On cherche n tel que $\sigma\left(M_n\right) \leqslant 0.5$ et donc $\sqrt{\frac{2.07}{n}} \leqslant 0.5$

Cette inégalité est équivalente à $\frac{2.07}{n} \leqslant 0.25$

Ce qui implique $0.25n \geqslant 2.07$ et finalement $n \geqslant \frac{2.07}{0.25}$

Comme $\frac{2.07}{0.25} = 8.28$,

$\boxed{\text{On conclut que la variance de } M_n \text{ est inférieure à } 0.5 \text{ pour } n \geqslant 9}$

c. Remarquons déjà que $6.3 \leqslant M_n \leqslant 8.3$ peut se réécrire $7.3 - 1 \leqslant M_n \leqslant 7.3 + 1$
En utilisant le résultat du a., on écrit encore $E\left(M_n\right) - 1 \leqslant M_n \leqslant E\left(M_n\right) + 1$
Ce qui donne $-1 \leqslant M_n - E\left(M_n\right) \leqslant 1$

Et finalement $\left|M_n - E\left(M_n\right)\right| \leqslant 1$

Ainsi, $P\left(6.3 \leqslant M_n \leqslant 8.3\right) = P\left(\left|M_n - E\left(M_n\right)\right| \leqslant 1\right)$
De plus $P\left(\left|M_n - E\left(M_n\right)\right| \leqslant 1\right) = 1 - P\left(\left|M_n - E\left(M_n\right)\right| > 1\right)$

On peut appliquer l'inégalité de Bienaimé Tchebychev sur cette dernière expression.

Rappel : *inégalité de Bienaimé Tchebychev. Pour une variable aléatoire X et un réel strictement positif δ, on a $P\left(\left|X - E(X)\right| \geqslant \delta\right) \leqslant \frac{V(X)}{\delta^2}$*

Ce qui nous donne $P\left(\left|M_n - E\left(M_n\right)\right| > 1\right) \leqslant \frac{V\left(M_n\right)}{1^2} = V\left(M_n\right)$

On sait de plus que $n \geqslant 9$, donc $V\left(M_n\right) \leqslant \frac{2.07}{9} = 0.23$

Finalement, $P\left(\left|M_n - E\left(M_n\right)\right| \leqslant 1\right) = 1 - P\left(\left|M_n - E\left(M_n\right)\right| > 1\right) \geqslant 0.77$

$\boxed{\text{Ce qui permet bien de conclure que } P\left(6.3 \leqslant M_n \leqslant 8.3\right) \geqslant 0.75 \text{ si } n \geqslant 9.}$

©antoine.remond.maths@gmail.com