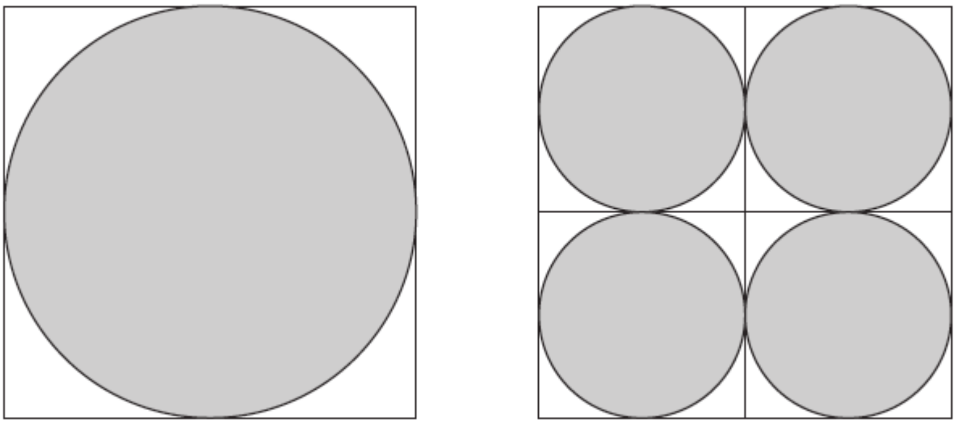
Exercice 10

$\mathcal{Q}$ est un carré de $1m$ de côté et $\mathcal{C}$ en est le cercle inscrit.

Si on partage $\mathcal{Q}$ en carrés plus petits et que l'on y trace leurs cercles inscrits respectifs, on obtient la figure suivante :



Augmentez autant que vous voulez le nombre de subdivisions. L'aire de la partie grisée croît-elle, décroît-elle ou reste-t-elle toujours la même ?

Solution

Étape 1 : le cercle initial a un rayon de $\frac{1}{2}$, et donc une aire $\mathcal{A}_1 = \pi \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{4}$

Étape 2 : à l'étape 2, on a maintenant 4 cercles, dont le rayon est de $\frac{1}{4}$. On a

$$\mathcal{A}_2 = 4 \times \pi \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 = 4 \times \frac{\pi}{16} = \frac{\pi}{4} = \mathcal{A}_1$$

Étape n : À chaque étape, le nombre de cercle est multiplié par 4 et le rayon de chaque cercle est divisé par 2 par rapport à l'étape précédente.

Ainsi, on trouve que la figure comporte 4^{n-1} cercles, dont le rayon est $\frac{1}{2^n}$. Ce qui donne :

$$\mathcal{A}_n = 4^{n-1} \times \pi \times \left(\frac{1}{2^n}\right)^2 = 4^{n-1} \times \pi \times \frac{1}{2^{2n}} = 4^{n-1} \times \pi \times \frac{1}{4^n} = \frac{\pi}{4} = \mathcal{A}_1$$

Ainsi, l'air grisée est constante à chaque subdivision !

Exercice 11

Dans chacun des cas, déterminer la valeur de n telle que :

1. $\left(\dfrac{4^5+4^5+4^5+4^5}{3^5+3^5+3^5}\right)\left(\dfrac{6^5+6^5+6^5+6^5+6^5+6^5}{2^5+2^5}\right) = 2^n$

2. $3^{2001} + 3^{2002} + 3^{2003} = n3^{2001}$

3. $\left(10^{2002}+25\right)^2 - \left(10^{2002}-25\right)^2 = 10^n$

Solution

1. $\left(\dfrac{4^5+4^5+4^5+4^5}{3^5+3^5+3^5}\right)\left(\dfrac{6^5+6^5+6^5+6^5+6^5+6^5}{2^5+2^5}\right)=\left(\dfrac{4\times4^5}{3\times3^5}\right)\left(\dfrac{6\times6^5}{2\times2^5}\right)=\dfrac{4^6\times6^6}{3^6\times2^6}$

$=\dfrac{4^6\times6^6}{(3\times2)^6}=4^6$

On doit donc résoudre l'équation : $4^6=2^n$

Or $4^6=\left(2^2\right)^6=2^{12}$

Et finalement, on cherche $2^{12}=2^n$

Ce qui donne $n=12$

2. $3^{2001}+3^{2002}+3^{2003}=3^{2001}(1+3+3^2)=13\times3^{2001}$

L'équation se réécrit donc $13\times3^{2001}=n3^{2001}$

La solution est donc $n=13$

3. Dans l'expression à simplifier on reconnaît une identité remarquable « a^2-b^2 » :

$\left(10^{2002}+25\right)^2-\left(10^{2002}-25\right)^2=\left(10^{2002}+25+10^{2002}-25\right)\left(10^{2002}+25-10^{2002}+25\right)$

$=2\times10^{2002}\times50=100\times10^{2002}=10^{2004}$

Et donc l'équation devient $10^{2004}=10^n$

On trouve donc $n=2004$

Exercice 12

Sans calculer les facteurs, prouver que :

$(2+1)\left(2^4+1\right)\left(2^8+1\right)\left(2^{16}+1\right)=2^{32}-1$

Solution

Remarques :

- *Sans même tenir compte de l'énoncé, on ne voit pas bien comment on pourrait manipuler les quantités du produit constituant le membre de gauche et encore moins comment faire apparaître un « $-$ » dans l'opération !*
- *Quand on doit prouver une égalité $A=B$, on naturellement tendance à partir de l'expression A, la transformer pour arriver à l'expression B. Il est cependant tout aussi légitime et correct de partir de B. C'est ce que nous allons faire ici.*
- *Une astuce classique pour débloquer certaines situations est de reconnaître que 1 est le carré de 1 !*

En écrivant : $2^{32}-1=\left(2^{16}\right)^2-1^2$, on reconnaît alors une identité remarquable :

$2^{32}-1=\left(2^{16}\right)^2-1^2=\left(2^{16}-1\right)\left(2^{16}+1\right)$

On va alors reproduire le procédé pour faire « descendre » les puissances de 2.

$2^{32}-1=\left(2^{16}-1\right)\left(2^{16}+1\right)=\left(2^8-1\right)\left(2^8+1\right)\left(2^{16}+1\right)=\left(2^4-1\right)\left(2^4+1\right)\left(2^8+1\right)\left(2^{16}+1\right)$

$=\left(2^2-1\right)\left(2^2+1\right)\left(2^4+1\right)\left(2^8+1\right)\left(2^{16}+1\right)=(2-1)(2+1)\left(2^2+1\right)\left(2^4+1\right)\left(2^8+1\right)\left(2^{16}+1\right)$

Ce qui démontre finalement que $(2+1)\left(2^4+1\right)\left(2^8+1\right)\left(2^{16}+1\right)=2^{32}-1$