

Exercice 7

Réduire les expressions suivantes

$$A = 2\sqrt{500} - 3\sqrt{75}$$

$$B = \sqrt{27} + 2\sqrt{75} - \sqrt{108}$$

$$C = 2\sqrt{32} + 3\sqrt{18} - 3\sqrt{50}$$

$$D = \sqrt{27} - 2\sqrt{3} + 5\sqrt{12}$$

$$E = -\sqrt{245} + 2\sqrt{45} + 5\sqrt{20}$$

$$F = \sqrt{27} + 2\sqrt{75} - \sqrt{12}$$

$$G = \sqrt{45} + 2\sqrt{125} - \sqrt{80}$$

$$H = \sqrt{150} + \sqrt{96} - 4\sqrt{24}$$

$$I = 3\sqrt{27} + 4\sqrt{300} - 5\sqrt{3}$$

$$J = \sqrt{80} - 2\sqrt{320} - 5\sqrt{45} + \sqrt{180} + 3\sqrt{5} - 2\sqrt{125}$$

Solution

Rappel : dans cet exercice, tu vas devoir utiliser la formule $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ pour $a > 0$ et $b > 0$

$$A = 2\sqrt{500} - 3\sqrt{75} = 2\sqrt{20 \times 25} - 3\sqrt{3 \times 25} = 2\sqrt{4 \times 5 \times 25} - 3\sqrt{3 \times 25} = 2 \times 2 \times 5\sqrt{5} - 3 \times 5\sqrt{3}$$

Donc $A = 20\sqrt{5} - 15\sqrt{3}$

$$B = \sqrt{27} + 2\sqrt{75} - \sqrt{108} = \sqrt{9 \times 3} + 2\sqrt{25 \times 3} - \sqrt{9 \times 3 \times 4} = 3\sqrt{3} + 5 \times 2\sqrt{3} - 3 \times 2\sqrt{3}$$

Donc $B = 7\sqrt{3}$

$$C = 2\sqrt{32} + 3\sqrt{18} - 3\sqrt{50} = 2\sqrt{16 \times 2} + 3\sqrt{9 \times 2} - 3\sqrt{25 \times 2} = 2 \times 4\sqrt{2} + 3 \times 3\sqrt{2} - 3 \times 5\sqrt{2}$$

Donc $C = 2\sqrt{2}$

$$D = \sqrt{27} - 2\sqrt{3} + 5\sqrt{12} = \sqrt{9 \times 3} - 2\sqrt{3} + 5\sqrt{4 \times 3} = 3\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + 5 \times 2\sqrt{3}$$

Donc $D = 11\sqrt{3}$

$$E = -\sqrt{245} + 2\sqrt{45} + 5\sqrt{20} = -\sqrt{49 \times 5} + 2\sqrt{9 \times 5} + 5\sqrt{4 \times 5} = -7\sqrt{5} + 2 \times 3\sqrt{5} + 5 \times 2\sqrt{5}$$

Donc $E = 9\sqrt{5}$

$$F = \sqrt{27} + 2\sqrt{75} - \sqrt{12} = \sqrt{9 \times 3} + 2\sqrt{25 \times 3} - \sqrt{4 \times 3} = 3\sqrt{3} + 2 \times 5\sqrt{3} - 2\sqrt{3}$$

Donc $F = 11\sqrt{3}$

$$G = \sqrt{45} + 2\sqrt{125} - \sqrt{80} = \sqrt{9 \times 5} + 2\sqrt{25 \times 5} - \sqrt{16 \times 5} = 3\sqrt{5} + 2 \times 5\sqrt{5} - 4\sqrt{5}$$

Donc $G = 9\sqrt{5}$

$$H = \sqrt{150} + \sqrt{96} - 4\sqrt{24} = \sqrt{25 \times 6} + \sqrt{16 \times 6} - 4\sqrt{4 \times 6} = 6\sqrt{6} + 4\sqrt{6} - 4 \times 2\sqrt{6}$$

Donc $H = 2\sqrt{6}$

$$I = 3\sqrt{27} + 4\sqrt{300} - 5\sqrt{3} = 3\sqrt{9 \times 3} + 4\sqrt{100 \times 3} - 5\sqrt{3} = 3 \times 3\sqrt{3} + 4 \times 10\sqrt{3} - 5\sqrt{3}$$

$$\text{Donc } I = 44\sqrt{3}$$

$$\begin{aligned} J &= \sqrt{80} - 2\sqrt{320} - 5\sqrt{45} + \sqrt{180} + 3\sqrt{5} - 2\sqrt{125} \\ &= \sqrt{16 \times 5} - 2\sqrt{64 \times 5} - 5\sqrt{9 \times 5} + \sqrt{36 \times 5} + 3\sqrt{5} - 2\sqrt{25 \times 5} \\ &= 4\sqrt{5} - 2 \times 8\sqrt{5} - 5 \times 3\sqrt{5} + 6\sqrt{5} + 3\sqrt{5} - 2 \times 5\sqrt{5} \end{aligned}$$

$$\text{Donc } J = -28\sqrt{5}$$

Exercice 8

Transformer les expressions suivantes pour qu'il n'y ait plus de radical (racine) au dénominateur

$$A = \frac{5}{\sqrt{6} - 1}$$

$$F = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7} - \sqrt{3}}$$

$$I = \frac{1 - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}}$$

$$J = \frac{2 + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}}$$

$$K = \frac{1 + \sqrt{6}}{\sqrt{3} + \sqrt{6}}$$

$$L = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{\sqrt{2} - \sqrt{3}}$$

$$M = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{5}}{\sqrt{2} - \sqrt{5}}$$

$$N = \frac{1 + \sqrt{3}}{2 + 2\sqrt{3}}$$

Solution

Rappel : pour faire disparaître les racines du dénominateur, on utilise l'« expression conjuguée » par laquelle on va multiplier le numérateur et le dénominateur. Pour $a + \sqrt{b}$, a dans $\mathbb{R}$ et $b > 0$, l'expression conjuguée est $a - \sqrt{b}$. Le produit correspond à une identité remarquable $(a + \sqrt{b})(a - \sqrt{b}) = a^2 - b$

$$A = \frac{5}{\sqrt{6} - 1} = \frac{5(\sqrt{6} + 1)}{(\sqrt{6} - 1)(\sqrt{6} + 1)} = \frac{5\sqrt{6} + 5}{6 - 1} = \frac{5\sqrt{6} + 5}{5}$$

$$\text{Donc } A = \sqrt{6} + 1$$

$$F = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7} - \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{7}(\sqrt{7} + \sqrt{3})}{(\sqrt{7} - \sqrt{3})(\sqrt{7} + \sqrt{3})} = \frac{7 + \sqrt{7}\sqrt{3}}{7 - 3}$$

$$\text{Donc } F = \frac{7 - \sqrt{21}}{4}$$

$$I = \frac{1 - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}} = \frac{(1 - \sqrt{3})(1 - \sqrt{3})}{(1 + \sqrt{3})(1 - \sqrt{3})} = \frac{1 + 3 - 2\sqrt{3}}{1 - 3}$$

$$\text{Donc } I = -\frac{4 - 2\sqrt{3}}{2}$$

$$J = \frac{2 + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}} = \frac{(2 + \sqrt{3})(1 + \sqrt{3})}{(1 - \sqrt{3})(1 + \sqrt{3})} = \frac{2 + 3\sqrt{3} + 3}{1 - 3}$$

$$\text{Donc } J = -\frac{5 + 3\sqrt{3}}{2}$$

$$K = \frac{1 + \sqrt{6}}{\sqrt{3} + \sqrt{6}} = \frac{(1 + \sqrt{6})(\sqrt{3} - \sqrt{6})}{(\sqrt{3} + \sqrt{6})(\sqrt{3} - \sqrt{6})} = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{6} + \sqrt{6}\sqrt{3} - 6}{3 - 6} = -\frac{\sqrt{3}(1 + \sqrt{6}) - \sqrt{6}(1 + \sqrt{6})}{3}$$

$$\text{Donc } K = \frac{(1 + \sqrt{6})(\sqrt{6} - \sqrt{3})}{3}$$

$$L = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{\sqrt{2} - \sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{2} + \sqrt{3})(\sqrt{2} + \sqrt{3})}{(\sqrt{2} - \sqrt{3})(\sqrt{2} + \sqrt{3})} = \frac{2 + 3 + 2\sqrt{2}\sqrt{3}}{2 - 3}$$

$$\text{Donc } L = -5 - 2\sqrt{6}$$

$$\begin{aligned} M &= \frac{\sqrt{3} + \sqrt{5}}{\sqrt{2} - \sqrt{5}} = \frac{(\sqrt{3} + \sqrt{5})(\sqrt{2} + \sqrt{5})}{(\sqrt{2} - \sqrt{5})(\sqrt{2} + \sqrt{5})} = \frac{\sqrt{3}\sqrt{2} + \sqrt{3}\sqrt{5} + \sqrt{2}\sqrt{5} + 5}{2 - 5} \\ &= -\frac{\sqrt{3}(\sqrt{2} + \sqrt{5}) + \sqrt{5}(\sqrt{2} + \sqrt{5})}{3} \end{aligned}$$

$$\text{Donc } M = -\frac{(\sqrt{2} + \sqrt{5})(\sqrt{3} + \sqrt{5})}{3}$$

Exercice 9

$$\text{On pose } B(n) = \frac{(8^{n+1} + 8^n)^2}{(4^n - 4^{n-1})^3}$$

1. Calculer $B(n)$ pour $n = 0$ et $n = 1$
2. Montrer que $B(n)$ ne dépend pas de n

Solution

1. Calculons les valeurs demandées :

$$B(0) = \frac{(8^1 + 8^0)^2}{(4^0 - 4^{-1})^3} = \frac{(8 + 1)^2}{\left(1 - \frac{1}{4}\right)^3} = \frac{9^2}{\left(\frac{3}{4}\right)^3} = \frac{(3^2)^2 \times 4^3}{3^3} = 3 \times 4^3 = 3 \times 64$$

Donc $B(0) = 192$

$$B(1) = \frac{(8^2 + 8^1)^2}{(4^1 - 4^0)^3} = \frac{(8(8 + 1))^2}{(4 - 1)^3} = \frac{(8 \times 9)^2}{3^3} = \frac{8^2 \times (3^2)^2}{3^3} = 64 \times 3$$

Donc $B(1) = 192$

2. On considère $n \geq 2$

$$B(n) = \frac{(8^{n+1} + 8^n)^2}{(4^n - 4^{n-1})^3} = \frac{(8^n(8 + 1))^2}{(4^{n-1}(4 - 1))^3} = \frac{8^{2n} \times (3^2)^2}{4^{3(n-1)} \times 3^3} = 3 \times \frac{(8^2)^n}{(4^3)^{n-1}} = 3 \times \frac{64^n}{64^{n-1}}$$

Et on peut donc conclure que pour tout n , $B(n) = 192$ et est donc indépendant de n