Exercice 4

Simplifier le produit :

$$p = \left(1-\frac{1}{2}\right)\times\left(1-\frac{1}{3}\right)\times\left(1-\frac{1}{4}\right)\times\ldots\times\left(1-\frac{1}{2024}\right)$$

Les points de suspensions signifient que l'on reproduit le même schéma jusqu'au dernier nombre.

Solution

Sous cette forme, le produit semble compliqué, voir impossible à calculer !
Il faut donc trouver un autre angle d'attaque. Regardons déjà les 2 premiers éléments :
$\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\left(1-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2}\times\frac{2}{3} = \frac{1}{3}$. On voit que 2 termes se simplifient.

Avec les 3 premiers :
$\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\left(1-\frac{1}{3}\right)\times\left(1-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4} = \frac{1}{3}\times\frac{3}{4} = \frac{1}{4}$. A nouveau, les termes se simplifient pour ne garder que l'inverse du dernier dénominateur.

On se trouve face à ce qu'on appelle un produit téléscopique (les termes s'annulent au fur et à mesure sauf le premier ou le dernier).

On peut réécrire :

$$p = \left(1-\frac{1}{2}\right)\times\left(1-\frac{1}{3}\right)\times\left(1-\frac{1}{4}\right)\times\ldots\times\left(1-\frac{1}{2024}\right) = \frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\ldots\times\frac{2023}{2024}$$

$\boxed{\text{Et on conclut } p = \frac{1}{2024}}$

Exercice 5

Donner sous forme décimale

$$A = \frac{10^4\times 7^{-1}}{2^7\times 7^{-3}\times 5^7}$$

$$B = \left(\frac{3^{-9}\times\left(10^{-3}\right)^{-2}}{2^{-1}\times 10^5\times 3^{-10}}\right)^2$$

$$C = \frac{2.5^5\times 3^{-2}\times 4^5\times 18^3}{5^8\times 3^{-4}\times 9^3\times 2^8}$$

Solution

<u>Rappel :</u> les règles de manipulation des puissances :
On considère a et b dans $\mathbb{R}$, n et m dans $\mathbb{Q}$
$a^n\times b^n = (ab)^n$
$a^n\times a^m = a^{n+m}$
$(a^n)^m = a^{n\times m}$
$\frac{1}{a^n} = a^{-n}$, d'où $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

$$A = \frac{10^4\times 7^{-1}}{2^7\times 7^{-3}\times 5^7} = \frac{10^4\times 7^{-1}}{10^7\times 7^{-3}} = \frac{10^4}{10^7}\times\frac{7^{-1}}{7^{-3}} = 7^2\times 10^{-3} = 49\times 0.001$$

$\boxed{\text{Et donc } A = 0.049}$

©antoine.remond.maths@gmail.com

$$B=\left(\frac{3^{-9}\times\left(10^{-3}\right)^{-2}}{2^{-1}\times 10^{5}\times 3^{-10}}\right)^{2}=\left(2\times\frac{3^{-9}\times 10^{6}}{10^{5}\times 3^{-10}}\right)^{2}=\left(2\times\frac{3^{-9}}{3^{-10}}\times\frac{10^{6}}{10^{5}}\right)^{2}=(2\times 3\times 10)^{2}$$

$\boxed{\text{Finalement } B=3600}$

$$C=\frac{2.5^{5}\times 3^{-2}\times 4^{5}\times 18^{3}}{5^{8}\times 3^{-4}\times 9^{3}\times 2^{8}}=\frac{\left(5\times 5\times 10^{-1}\right)^{5}\times 3^{-2}\times 4^{5}\times(2\times 9)^{3}}{5^{8}\times 3^{-4}\times 9^{3}\times 2^{8}}=\frac{5^{10}\times 10^{-5}\times 3^{-2}\times 4^{5}\times 2^{3}\times 9^{3}}{5^{8}\times 3^{-4}\times 9^{3}\times 2^{8}}$$
$$=\frac{5^{10}}{5^{8}}\times\frac{3^{-2}}{3^{-4}}\times\frac{2^{13}}{2^{8}}\times 10^{-5}=5^{2}\times 3^{2}\times 2^{5}\times 10^{-5}=25\times 9\times 32\times 10^{-5}$$

$\boxed{\text{On conclut } C=0.072}$

Exercice 6

1. Simplifier $A=\sqrt{(3-\pi)^{2}}$
2. Soient $B=\sqrt{3}-\sqrt{2}$ et $C=\sqrt{5-2\sqrt{6}}$. Montrer que $B=C$.
3. Soient $D=\sqrt{10-2\sqrt{21}}$ et $E=\sqrt{3}-\sqrt{7}$. A-t-on $D=E$?
4. Soit $F=\sqrt{3-\sqrt{8}}-\sqrt{3+\sqrt{8}}$. Montrer que F est un entier.

Solution

1. En voyant la racine d'un nombre au carré, on a envie d'écrire $A=3-\pi$.

Mais c'est malheureusement faux car $3-\pi<0$! Or les images par la fonction racine carrée sont forcément positives.

$\boxed{\text{Donc } A=\pi-3}$

2. On a bien $5-2\sqrt{6}>0$ (je te laisse vérifier !), donc C est bien défini.

B est évidemment positif également, on peut donc comparer le carré des 2 expressions.

Rappel : *si $a=b$, alors $a^2=b^2$. C'est faux dans l'autre sens, c'est le principe de la 1ère question, sauf si on s'est assuré que a et b sont de même signe.*

On a immédiatement : $C^2=5-2\sqrt{6}$

Pour calculer B^2, on reconnaît une identité remarquable :

$$B^{2}=\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^{2}=3+2-2\sqrt{3}\sqrt{2}=5-2\sqrt{6}$$

On a donc $B^2=C^2$ et B et C positif.

$\boxed{\text{On peut conclure } B=C}$

3. On va bien sûr aborder cette question de la même façon que la précédente, je te laisse de refaire !

On arrive bien à la conclusion que $D^2=E^2$.

Mais attention, $E=\sqrt{3}-\sqrt{7}<0$! Il faut toujours commencer par vérifier le signe des expressions considérées avant de comparer leurs carrés.

$\boxed{\text{On a cette fois } D=-E}$

4. Il semble compliqué d'attaquer l'expression de F de front.
Vu la forme de F (sous les racines on trouve 2 expressions conjuguées), une idée intéressante est de s'intéresser au carrée de F.

Avant d'aller plus loin, on remarque que $F < 0$ (on a $\sqrt{3-\sqrt{8}} < \sqrt{3+\sqrt{8}}$. Si ça ne te semble pas évident, tu peux élever chacun des termes au carré, car ils sont tous les 2 positifs et le résultat apparaîtra certainement plus clairement). Il faudra garder cela en tête au moment de la conclusion.

<u>Rappel :</u> pour ce calcul, on va 2 identités remarquables. J'en profite pour rappeler les 3 « classiques » à connaître par cœur, <u>dans les 2 sens</u> :

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

$$F^2 = \left(\sqrt{3-\sqrt{8}} - \sqrt{3+\sqrt{8}}\right)^2 = 3 - \sqrt{8} + 3 + \sqrt{8} - 2\sqrt{3-\sqrt{8}}\sqrt{3+\sqrt{8}} = 6 - 2\sqrt{\left(3-\sqrt{8}\right)\left(3+\sqrt{8}\right)}$$
$$= 6 - 2\sqrt{9-8} = 6 - 2 = 4$$

On peut en rester là en concluant comme demandé que $F^2 = 4$ nous assure que F est un entier.

Si on veut préciser, on doit bien faire attention au signe et conclure alors que $\boxed{F = -2}$