Exercice 1

Un ballon de football est formé de 12 pentagones réguliers et de 20 hexagones réguliers assemblés entre eux par une couture.
Leurs côtés mesurent $4.5cm$.
Trouver la longueur de la couture.

Solution

Le nombre total de côté des polygones est égal à $12 \times 5 + 20 \times 6 = 60 + 120 = 180$.
Attention : chacun de ces côté est partagé par 2 polygones !

La longueur de la couture est donc donnée par : $\dfrac{180}{2} \times 4.5 = 90 \times 4.5 = 405$

$\boxed{\text{La longueur de la couture est de } 405cm \text{ ou } 4m \text{ et } 5cm.}$

Exercice 2

Calculer et donner le résultat sous forme d'une fraction irréductible

$$A = \frac{3 - \frac{2}{5} + \frac{4}{3}}{2 + \frac{4}{5} - \frac{2}{3}}$$

$$B = \frac{6 - \frac{5}{2} + \frac{3}{8}}{3 - \frac{5}{2} - \frac{7}{4}}$$

$$C = \frac{\frac{1}{3} - \frac{5}{2}}{\frac{3}{4} - \frac{1}{2}} \times \frac{\frac{5}{6} + \frac{7}{3}}{1 - \frac{5}{6}} \times \frac{-\frac{2}{5} + 1}{\frac{2}{5} - 1}$$

$$D = \frac{\frac{5}{6} + \frac{1}{5}}{\frac{5}{6} - \frac{1}{5}} \times \frac{\frac{3}{4} - \frac{2}{3}}{\frac{3}{4} + \frac{2}{3}} \times \frac{\frac{1}{4} - 5}{1 + \frac{1}{4}}$$

$$E = \left(\frac{3}{4} - \frac{5}{3}\right) \times \frac{2 - \frac{4}{7}}{3} \times \frac{1}{\frac{4}{3} - \frac{1}{2}}$$

$$F = \frac{\frac{1}{2} - \frac{4}{3}}{\frac{1}{8} + \frac{3}{7}} \times \frac{\frac{2}{3} + \frac{7}{5}}{\frac{1}{12} - \frac{23}{3}}$$

Solution

$$A = \frac{3 - \frac{2}{5} + \frac{4}{3}}{2 + \frac{4}{5} - \frac{2}{3}} = \frac{\frac{45 - 6 + 20}{15}}{\frac{30 + 12 - 10}{15}}$$

Les dénominateurs étant identiques pour les 2 expressions au numérateur et au dénominateur, on peut les simplifier et :

$$\boxed{A = \frac{59}{32}}$$

$$B = \frac{6 - \frac{5}{2} + \frac{3}{8}}{3 - \frac{5}{2} - \frac{7}{4}}$$

Pour pouvoir utiliser le même principe que pour A, on va tout de suite mettre 8 au dénominateur des 2 expressions. On pourrait évidemment laisser 4 au dénominateur du dénominateur, mais cela laisserait de toute façon un facteur 2 pour la suite.

$$B = \frac{6 - \frac{5}{2} + \frac{3}{8}}{3 - \frac{5}{2} - \frac{7}{4}} = \frac{\frac{48 - 20 + 3}{8}}{\frac{24 - 20 - 14}{8}} = \frac{31}{-10}$$

$$\boxed{B = -\frac{31}{10}}$$

Pour C nous allons d'abord considérer les facteurs du produit séparément pour ne pas alourdir l'écriture :

$$\frac{\frac{1}{3} - \frac{5}{2}}{\frac{3}{4} - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{2 - 15}{6}}{\frac{6 - 4}{8}} = \frac{-13}{6} \times \frac{8}{2} = -\frac{13 \times 2 \times 2 \times 2}{3 \times 2 \times 2} = -\frac{26}{3}$$

$$\frac{\frac{5}{6} + \frac{7}{3}}{1 - \frac{5}{6}} = \frac{\frac{5 + 14}{6}}{\frac{6 - 5}{6}} = 19$$

$$\frac{-\frac{2}{5} + 1}{\frac{2}{5} - 1} = \frac{-\left(\frac{2}{5} - 1\right)}{\frac{2}{5} - 1} = -1$$

$$\boxed{\text{Finalement } C = -\frac{26}{3} \times 19 \times -1 = \frac{494}{3}}$$

Utilisons la même approche pour le calcul de D :

$$\frac{\frac{5}{6} + \frac{1}{5}}{\frac{5}{6} - \frac{1}{5}} = \frac{\frac{25 + 6}{30}}{\frac{25 - 6}{30}} = \frac{31}{19}$$

$$\frac{\frac{3}{4} - \frac{2}{3}}{\frac{3}{4} + \frac{2}{3}} = \frac{\frac{9 - 8}{12}}{\frac{9 + 8}{12}} = \frac{1}{17}$$

$$\frac{\frac{1}{4} - 5}{1 + \frac{1}{4}} = \frac{\frac{1 - 20}{4}}{\frac{4 + 1}{4}} = -\frac{19}{5}$$

$$\boxed{\text{Donc } D = \frac{31}{19} \times \frac{1}{17} \times -\frac{19}{5} = -\frac{31}{85}}$$

E est un peu plus simple, mais gardons l'approche par facteur une nouvelle fois :

$$\frac{3}{4} - \frac{5}{3} = \frac{9 - 20}{12} = -\frac{11}{12}$$

$$\frac{2 - \frac{4}{7}}{3} = \frac{14 - 4}{3 \times 7} = \frac{10}{21}$$

$$\frac{1}{\frac{4}{3} - \frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{8 - 3}{6}} = \frac{6}{5}$$

$\boxed{\text{Et donc } E = -\frac{11}{12} \times \frac{10}{21} \times \frac{6}{5} = -\frac{11 \times 5 \times 2 \times 3 \times 2}{3 \times 2 \times 2 \times 21 \times 5} = -\frac{11}{21}}$

Gardons le même principe pour le dernier calcul (surtout que les calculs sont une peu plus compliqués) :

$$\frac{\frac{1}{2} - \frac{4}{3}}{\frac{1}{8} + \frac{3}{7}} = \frac{\frac{3-8}{6}}{\frac{7+24}{56}} = -\frac{5}{6} \times \frac{56}{31} = -\frac{5 \times 28 \times 2}{3 \times 2 \times 31} = -\frac{140}{93}$$

$$\frac{\frac{2}{3} + \frac{7}{5}}{\frac{1}{12} - \frac{23}{3}} = \frac{\frac{10+21}{15}}{\frac{1-92}{12}} = \frac{31}{15} \times -\frac{12}{91} = -\frac{31 \times 4 \times 3}{3 \times 5 \times 91} = -\frac{124}{455}$$

On voit que des facteurs vont se simplifier, donc on repart des fractions « décomposées » :

$$F = -\frac{5 \times 28}{3 \times 31} \times -\frac{31 \times 4}{5 \times 91} = \frac{7 \times 4 \times 4}{3 \times 13 \times 7}$$

$\boxed{\text{Et finalement } F = \frac{16}{39}}$

Exercice 3

Calculer les expressions suivantes et donner les résultats sous forme de fraction irréductible

$$A = 2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3}}}$$

$$B = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3}}}}$$

$$C = 1 - \frac{1}{2 - \frac{1}{3 - \frac{1}{4}}}$$

$$D = 1 + \frac{2}{3 + \frac{2}{3 - \frac{2}{1 - \frac{1}{2}}}}$$

Solution

Pour ce type d'expression, on « remonte » en partant de la fraction la plus basse.

Calcul de A :

$\frac{1}{2 + \frac{1}{3}} = \frac{1}{\frac{6+1}{3}} = \frac{3}{7}$ et $A = 2 + \frac{1}{3 + \frac{3}{7}}$

$\frac{1}{3 + \frac{3}{7}} = \frac{1}{\frac{21+3}{7}} = \frac{7}{24}$ d'où $A = 2 + \frac{7}{24}$

$\boxed{\text{Finalement } A = 2 + \frac{7}{24} = \frac{48+7}{24} = \frac{55}{24}}$

Calcul de B :

$$\frac{1}{1+\frac{1}{3}} = \frac{1}{\frac{3+1}{3}} = \frac{3}{4} \text{ d'où } B = \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{3}{4}}}$$

$$\frac{1}{1+\frac{3}{4}} = \frac{1}{\frac{4+3}{4}} = \frac{4}{7} \text{ et } B = \frac{1}{1+\frac{4}{7}}$$

$$\boxed{\text{On a donc } B = \frac{1}{1+\frac{4}{7}} = \frac{1}{\frac{7+4}{7}} = \frac{7}{11}}$$

Calcul de C :

$$\frac{1}{3-\frac{1}{4}} = \frac{1}{\frac{12-1}{4}} = \frac{4}{11} \text{ et } C = 1 - \frac{1}{2-\frac{4}{11}}$$

$$\frac{1}{2-\frac{4}{11}} = \frac{1}{\frac{22-4}{11}} = \frac{11}{18} \text{ et } C = 1 - \frac{11}{18}$$

$$\boxed{\text{Donc } C = 1 - \frac{11}{18} = \frac{18-11}{18} = \frac{7}{18}}$$

Calcul de D :

$$\frac{2}{1-\frac{1}{2}} = \frac{2}{\frac{1}{2}} = 2 \times \frac{2}{1} = 4 \text{ et } D = 1 + \frac{2}{3+\frac{2}{3-4}}$$

De là, on peut calculer D directement :

$$\boxed{D = 1 + \frac{2}{3-2} = 1 + 2 = 3}$$