Les vecteurs - 1ère partie

Rappels :

Définitions

Définition : une **translation** fait « glisser » une figure selon une direction, un sens et une longueur donnée. On peut schématiser ces 3 éléments par une flèche.

Définition : la flèche qui définit une translation s'appelle un **vecteur**.
Un vecteur est ainsi défini par :
- une direction,
- un sens,
- une longueur.

Attention : ne pas confondre direction et sens. Une droite (AB) définit une direction. Aller de A vers B définit un sens (qui est donc opposé à celui qui va de B vers A).

Définition : on dit que 2 vecteurs sont égaux s'ils ont la même direction, le même sens et la même longueur.

Définition : la longueur d'un vecteur est appelée sa **norme**. On note la norme du vecteur $\vec{u}$: $\left\| \vec{u} \right\|$.

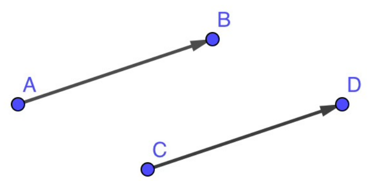
Exemple 1 :

Dans le scénario ci-dessous, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux.

On peut noter cela simplement $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

On dit alors que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont **les représentants d'un même vecteur** que l'on peut nommer $\vec{u}$.

Finalement, on a $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$



Propriété : le vecteur est une entité abstraite, il est **indépendant des points qu'on utilise pour le représenter**. C'est pour cela qu'on préfère la notation avec une seule lettre. On peut par exemple placer le vecteur $\overrightarrow{AB}$ n'importe où sur le plan, tant que les flèches sont superposables. *C'est cette propriété qu'on utilise pour les exercices d'additions de vecteurs comme on le verra par la suite.*

Propriété : dire que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ revient à dire que le quadrilatère $ABDC$ est un parallélogramme. En effet, cela signifie que $ABDC$ possède 2 côtés opposés parallèles et de même longueur, ce qui entraîne qu'il en est de même pour les 2 autres côtés.

Définition : on dit que le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est le **vecteur nul** si A et B sont confondus. On note alors $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$.

Remarque : pour tout point M du plan on a $\overrightarrow{MM} = \vec{0}$.

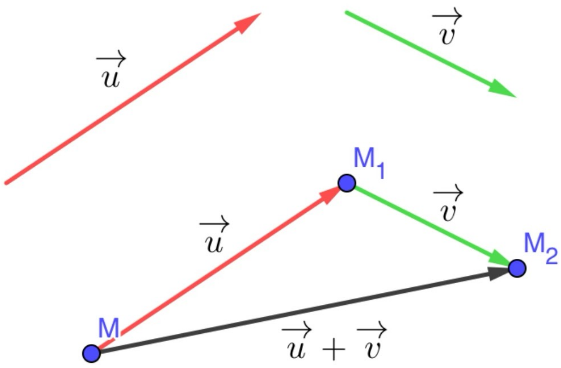
Définition : on dit que **2 vecteurs sont opposés** s'ils ont la même direction, la même norme mais des sens opposés.

Exemple 2 : pour tous points A et B du plan, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BA}$ sont opposés. On note $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$

En reprenant la notation de l'exemple 1, on a $\overrightarrow{BA} = -\vec{u}$.

Somme de vecteurs

Illustrons le principe avec un exemple :



On considère les translations t_1 représentée par le vecteur $\vec{u}$ et t_2 représentée par le vecteur $\vec{v}$.
L'image de M par t_1 est M_1 et l'image de M_1 par t_2 est M_2.

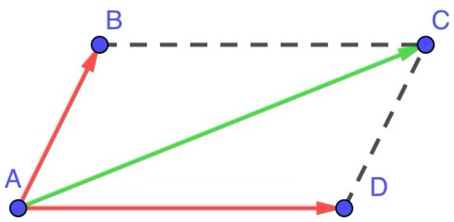
L'enchaînement (la composition) des 2 translations revient à une unique translation qui donne M_2 comme image de M. On note alors $\overrightarrow{MM_2} = \vec{u} + \vec{v}$.

<u>*Remarque :*</u> *on peut utiliser l'image qu'on parcourt $\vec{u}$ puis $\vec{v}$ en les mettant bout-à-bout. Ça reste une image à ne pas utiliser sur une copie !*

<u>Définition :</u> en conservant les notations de l'exemple, on définit la **somme de 2 vecteurs** $\overrightarrow{MM_1}$ et $\overrightarrow{M_1M_2}$ par $\overrightarrow{MM_1} + \overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{MM_2}$.

<u>*Remarque :*</u> *la relation introduite dans la définition porte le nom de **relation de Chasles**.*

<u>Propriété du parallélogramme :</u> $ABCD$ est un parallélogramme est équivalent à $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$

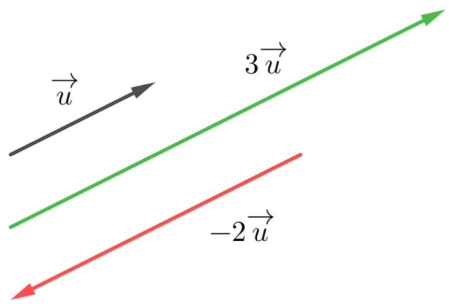


<u>Définition :</u> en reprenant la définition de l'opposé d'un vecteur, on définit la **soustraction de 2 vecteurs** par la somme du 1er vecteur avec l'opposé du 2ème. C'est à dire $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + \left(-\vec{v}\right)$

<u>Propriété :</u> l'addition vectorielle est **associative** et **commutative**.
Si besoin, je vous laisse vérifier les définitions de ces termes !

<u>Définition :</u> on peut multiplier un vecteur $\vec{u}$ par un réel k pour obtenir le vecteur $k\vec{u}$ de même direction que $\vec{u}$, dont le sens est déterminé par le signe de k (même sens si k est positif, et sens opposé si k est négatif) et dont la norme est celle de $\vec{u}$ multipliée par $\left|k\right|$ k

Exemple :



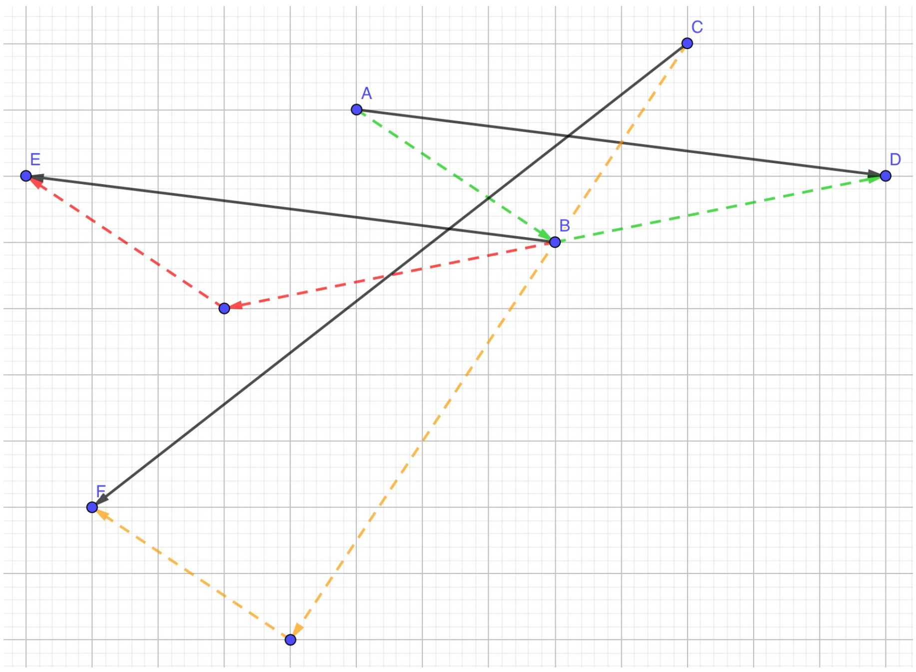
Définition : 2 vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits **colinéaires** s'ils ont la même direction. C'est à dire s'il existe un réel non nul k tel que $\vec{v} = k\vec{u}$.

Remarque : le vecteur nul est colinéaire à tous les vecteurs du plan !

Exercice 1 :

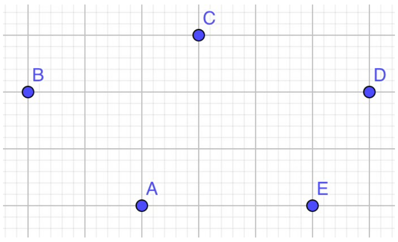
On place 3 points A, B et C sur le plan.
Construire les points D, E et F tels que :
$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$
$\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{AB}$
$\overrightarrow{CF} = 3\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA}$

Solution :



Exercice 2 :

Soient 5 points A, B, C, D et E disposés comme suit :



1. Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ 2 vecteurs définis par :

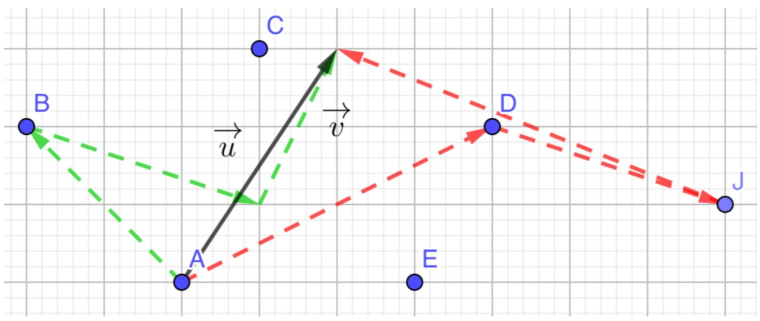
$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{ED}$
$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EB}$

Construire un représentant d'origine A de chacun de ces vecteurs.
Que constate-t-on ?

2. À l'aide de la relation de Chasles, montrer que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v}$

Solution :

1. Traçons la figure :



$\overrightarrow{u}$ « suit » le tracé vert.
$\overrightarrow{v}$ « suit » le tracé rouge.

On constate que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v}$

2. Nous allons maintenant retrouver ce résultat par une méthode algébrique.
<u>Attention :</u> on ne peut évidemment pas utiliser la question 1 pour arriver au résultat.

<u>Remarque :</u> pour répondre à ce genre de question, il faut insérer les points qui nous « rapprochent » de la solution puis tenter de simplifier les termes résiduels avec des égalités de vecteurs opposés.

Nous allons donc écrire $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB}$ et $\overrightarrow{ED} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BD}$ dans la définition de $\overrightarrow{u}$
On ne touche pas à $\overrightarrow{CD}$ qui est présent dans la définition des 2 vecteurs.

$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{ED} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BD}$

Or $\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{0}$

Donc $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{0}$

Et finalement $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v}$

Exercice 3 :

Soient R, S et T 3 points.

1.

a. Construire le point P tel que $\overrightarrow{RP} = \overrightarrow{RS} + \overrightarrow{RT}$

b. En utilisant la relation de Chasles, montrer que $\overrightarrow{TP} = \overrightarrow{RS}$

2.

a. Construire le point U tel que $\overrightarrow{SU} = \overrightarrow{SR} + \overrightarrow{ST}$

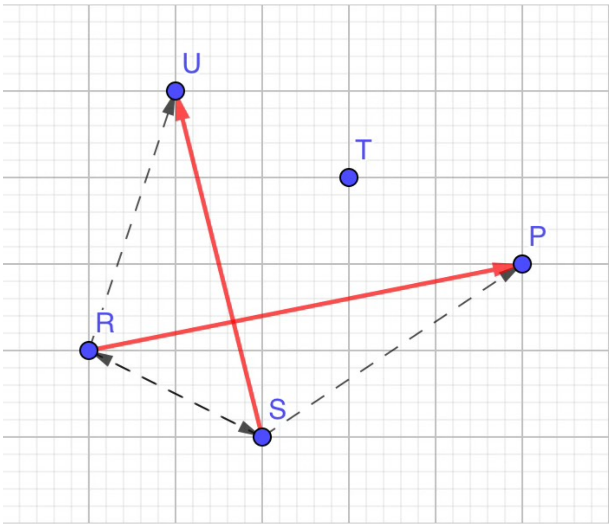
b. Montrer que $\overrightarrow{RU} = \overrightarrow{ST}$

c. En déduire la nature du quadrilatère $SRUT$

3. Démontrer que T est le milieu de $[UP]$

Solution :

Traçons d'abord la figure :



1.

a. Cf figure.

b. Comme proposé, utilisons la relation de Chasles :

$\overrightarrow{TP} = \overrightarrow{TR} + \overrightarrow{RP}$

$= \overrightarrow{TR} + \overrightarrow{RS} + \overrightarrow{RT}$ (en utilisant la définition de P)

Et comme $\overrightarrow{TR} + \overrightarrow{RT} = \overrightarrow{0}$, on obtient bien : $\overrightarrow{TP} = \overrightarrow{RS}$.

2.

a. Cf figure

b. Reproduisons le raisonnement que pour la question 1.b. :

$\overrightarrow{RU} = \overrightarrow{RS} + \overrightarrow{SU}$

$= \overrightarrow{RS} + \overrightarrow{SR} + \overrightarrow{ST}$

Et donc $\overrightarrow{RU} = \overrightarrow{ST}$

c. Comme $\overrightarrow{RU} = \overrightarrow{ST}$, $SRUT$ possède 2 côtés opposés parallèle et de même longueur.

Ceci permet de conclure que $SRUT$ est un parallélogramme.

3. Pour montrer que T est le milieu de $[UP]$, nous allons utiliser la propriété vectorielle équivalente qui est $\overrightarrow{UT} = \overrightarrow{TP}$

Nous allons tâcher de trouver un 3ème vecteur qui sera égal à la fois à $\overrightarrow{UT}$ et à $\overrightarrow{TP}$.
Nous avons déjà $\overrightarrow{TP} = \overrightarrow{RS}$ suite à la question 1.b.

De plus, $SRUT$ est un parallélogramme, donc $\overrightarrow{UT} = \overrightarrow{RS}$

Finalement, on conclut que $\overrightarrow{UT} = \overrightarrow{TP} = \overrightarrow{RS}$ et donc que T est le milieu de $[UP]$.

Exercice 4 :

Compléter les égalités vectorielles

1. $\overrightarrow{A..} + \overrightarrow{C..} = \overrightarrow{AD}$
2. $\overrightarrow{..M} + \overrightarrow{P..} + \overrightarrow{M..} = \overrightarrow{AB}$
3. $\overrightarrow{S..} - \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{....} = \overrightarrow{0}$
4. $\overrightarrow{RT} + \overrightarrow{SU} + \overrightarrow{T..} = - \overrightarrow{..R}$

Solution :

1. $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$
2. $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{MP} = \overrightarrow{AB}$
3. $\overrightarrow{SG} - \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{FS} = \overrightarrow{0}$
4. $\overrightarrow{RT} + \overrightarrow{SU} + \overrightarrow{TS} = - \overrightarrow{UR}$