Exercice 162 :

Étudier la fonction f définie par $\forall x \in \left]1,+\infty\right[,\ f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$

Solution :

f est bien définie sur $\left]1,+\infty\right[$ car on y a bien $x^2-1 \geqslant 0$.
Elle y est également dérivable comme quotient de fonctions qui le sont.

$$\forall x \in \left]1,+\infty\right[,\ f'(x)=\frac{\sqrt{x^2-1}-x\frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}}{x^2-1}=-\frac{1}{\left(x^2-1\right)^{\frac{3}{2}}}<0.$$

$\boxed{\text{Donc } f \text{ est décroissante sur } \left]1,+\infty\right[}$

De plus, quand $x\to 1,\ x^2-1\to 0$ et $\boxed{\lim_{x\to 1} f(x)=+\infty}$

Étudions le comportement quand $x\to+\infty$, car on y rencontre une forme indéterminée « $\dfrac{0}{0}$ » :

On peut écrire $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}=\dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}$ et $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x)=1}$

Exercice 163 :

a. Etudier la fonction f définie par $\forall x \in \left]1,+\infty\right[,\ f(x)=\ln\left(1+e^x\right)$
b. Montrer que $\lim_{x\to+\infty} f(x)-x=0$. Interpréter géométriquement

Solution :

a. Confirmons déjà que f est bien définie sur $\left]1,+\infty\right[$ et même sur $\mathbb{R}$ car $\forall x\in\mathbb{R},\ 1+e^x>1$
On note d'ailleurs que $\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)>0$

On sait de plus que f et dérivable sur $\left]1,+\infty\right[$, comme composée de fonctions dérivable, et
$\forall x \in \left]1,+\infty\right[,\ f'(x)=\dfrac{e^x}{1+e^x}>0$ et $\boxed{f \text{ est strictement croissante.}}$

<u>Remarque :</u> on pouvait également le voir directement car f est la composée de 2 fonctions strictement croissantes sur l'intervalle considéré.

Le domaine de définition est un intervalle ouvert (c'est un peu étonnant d'ailleurs), donc « $f(1)$ » n'est pas défini dans cet exercice !

On peut par contre écrire : $\boxed{\lim_{x\to 1} f(x)=\ln(1+e)}$

En $+\infty$, il n'y a pas de forme indéterminée, et on a $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty}$

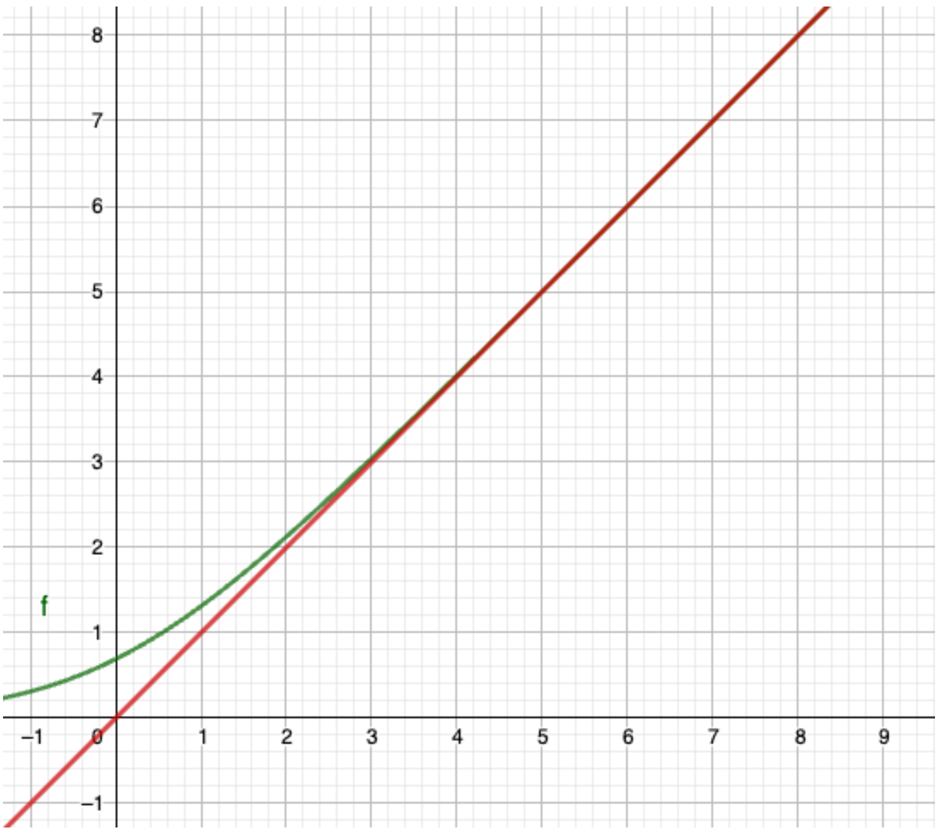
b. On peut écrire $\forall x \in \left]1,+\infty\right[,\ f(x)=\ln\left(1+e^x\right)=\ln\left(e^x\left(1+\dfrac{1}{e^x}\right)\right)=x+\ln\left(1+\dfrac{1}{e^x}\right)$

On a donc $\forall x \in \left]1, +\infty\right[,\ f(x) - x = \ln\left(1 + \frac{1}{e^x}\right)$

Donc quand $x \to +\infty$, $\frac{1}{e^x} \to 0$ et $\ln\left(1 + \frac{1}{e^x}\right) \to 0$

On confirme donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - x = 0$

Graphiquement, la droite d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe représentative de f.



Exercice 164 :

a. Etudier la fonction $f : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$

b. En utilisant a, déterminer les couples (a, b) d'éléments de $\mathbb{N}^*$ vérifiants $a < b$ et $a^b = b^a$.

Solution :

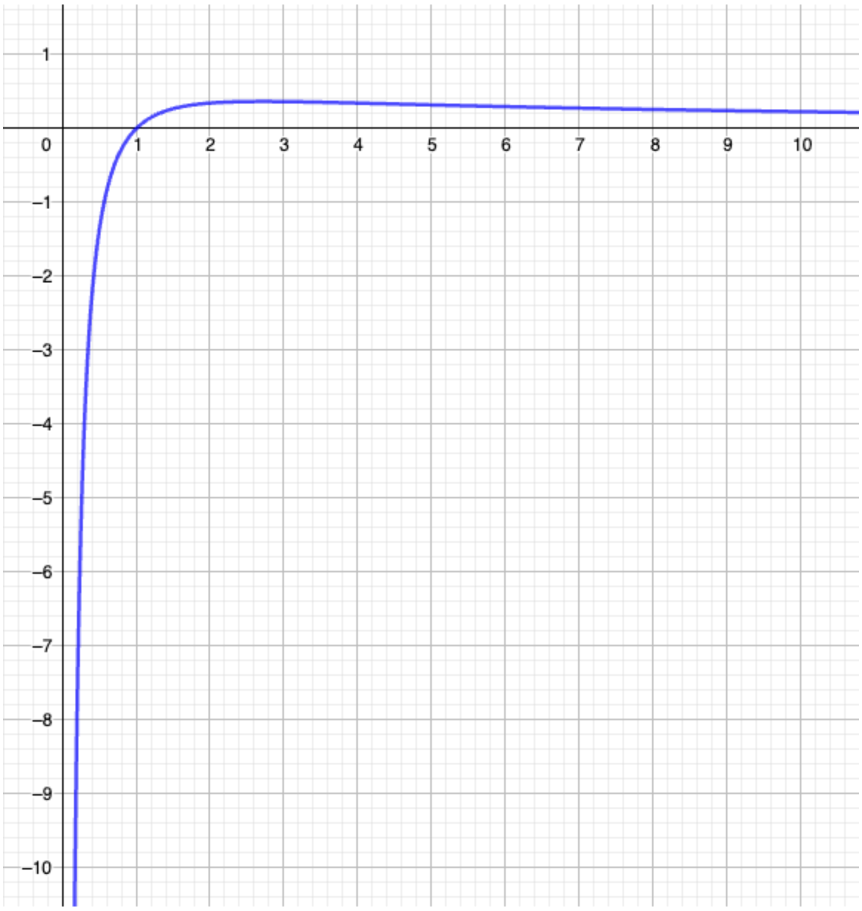
a. La fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$ qui est le domaine de définition de la fonction logarithme.
Elle y est également dérivable comme quotient de fonctions qui le sont, dont le dénominateur ne s'annule pas.

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) = \frac{\frac{x}{x} - \ln(x)}{x^2} = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}$

Ce qui implique que f' est du signe de $1 - \ln(x)$

Ainsi f est croissante sur $]-\infty, e]$, puis décroissante sur $[e, +\infty[$.

De plus, $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(x)}{x} = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ avec un maximum pour $f(e) = \frac{1}{e}$



b. On cherche $\left(a, b\right)$ d'éléments de $\mathbb{N}^*$ vérifiants $a < b$ et $a^b = b^a$

Les 2 quantités étant strictement positives, on a :

$a^b = b^a \Leftrightarrow b \ln(a) = a \ln\left(b\right) \Leftrightarrow \dfrac{\ln(a)}{a} = \dfrac{\ln\left(b\right)}{b}$

On sait de plus que $f(1) = 0$ et pour $x \geqslant e,\ f$ est décroissante. Donc on a forcément $a = 2$.

On cherche donc b tel que $\dfrac{\ln\left(b\right)}{b} = \dfrac{\ln(2)}{2}$. De plus, si on trouve une solution, on sait qu'elle sera unique.

Comme $\dfrac{\ln(4)}{4} = \dfrac{2\ln(2)}{4} = \dfrac{\ln(2)}{2}$,

$\boxed{\text{On conclut que } \left(a, b\right) = (2{,}4).}$