Brevet 1978 - Paris

Algèbre

1. A est définie sur $\mathbb{R}$ par $A(x) = 64 - 9x^2$

On peut réécrire A sous la forme $A(x) = 8^2 - (3x)^2$ qui fait apparaître une identité remarquable.

Ce qui permet de conclure $A(x) = (8 + 3x)(8 - 3x)$

2. B est définie sur $\mathbb{R}$ par $B(x) = x(49 + 12x) + 50 + (3x + 7)(2 - x)$

On développe : $B(x) = 49x + 12x^2 + 50 + 6x - 3x^2 + 14 - 7x = 48x + 9x^2 + 64$

Et donc $B(x) = 9x^2 + 48x + 64$

On peut cette fois écrire : $B(x) = (3x)^2 + 2 \times 8 \times 3x + 8^2$ pour reconnaître une identité remarquable.

On conclut $B(x) = (3x + 8)^2$

3. On définit $h(x) = \dfrac{B(x)}{A(x)}$

h est définie pour tout x tel que $A(x) \neq 0$
Et on a vu à la question 1 que $A(x) = (8 + 3x)(8 - 3x)$
Donc $A(x) = 0$ si $8 + 3x = 0$ ou $8 - 3x = 0$

Or $8 + 3x = 0$ est équivalent à $3x = -8$
Ce qui donne $x = -\dfrac{8}{3}$

et de la même façon, $8 - 3x = 0$ pour $x = \dfrac{8}{3}$

Ainsi, $A(x) = 0$ pour $x = -\dfrac{8}{3}$ ou $x = \dfrac{8}{3}$.

Et donc on trouve l'ensemble de définition $E = \mathbb{R} \backslash \left\{ -\dfrac{8}{3}; \dfrac{8}{3} \right\}$

Pour x dans E, $h(x) = \dfrac{B(x)}{A(x)} = \dfrac{(3x + 8)^2}{(8 + 3x)(8 - 3x)} = \dfrac{(3x + 8)(3x + 8)}{(3x + 8)(8 - 3x)}$
On peut simplifier par $3x + 8$ qui est en facteur au numérateur et au dénominateur,

Ce qui donne $h(x) = \dfrac{3x + 8}{8 - 3x}$

<u>Attention :</u> il faut bien valider l'ensemble de définition avant de simplifier ! Comme on le voit, la forme simplifiée pourrait laisser penser que l'ensemble de définition de h est $\mathbb{R}$ privé uniquement de $x = \dfrac{8}{3}$, ce qui n'est pas le cas.

On trouve : $h(-3) = \dfrac{3 \times (-3) + 8}{8 - 3 \times (-3)} = \dfrac{-9+8}{8+9} = \dfrac{-1}{17}$
Et $h(0) = \dfrac{3 \times 0 + 8}{8 - 3 \times 0} = \dfrac{8}{8} = 1$

4. Pour résoudre $h(x) = 0$, il faut trouver $x \in E$ et $B(x) = 0$
Comme $B(x) = (3x+8)^2$, $B(x) = 0$ si $3x + 8 = 0$.

Nous avons déjà résolu cette équation précédemment et la solution est $x = -\dfrac{8}{3}$.

Mais cette valeur n'est pas dans E !

$\boxed{\text{Donc } h(x) = 0 \text{ n'a pas de solution.}}$

5. On utilise à nouveau $A(x) = (8+3x)(8-3x)$.
L'inégalité $A(x) > 0$ signifie qu'on cherche les valeurs de x telles que $A(x) \neq 0$ et $8 + 3x$ et $8 - 3x$ sont de même signe.

On a : $8 + 3x > 0$ pour $x > -\dfrac{8}{3}$ et $8 + 3x < 0$ pour $x < -\dfrac{8}{3}$
De même : $8 - 3x > 0$ pour $x < \dfrac{8}{3}$ et $8 - 3x < 0$ pour $x > \dfrac{8}{3}$

Ce qui donne le tableau de signes :

x	$-\infty$		$-\frac{3}{8}$		$\frac{3}{8}$		$+\infty$
$8+3x$		$-$		$+$		$+$	
$8-3x$		$+$		$+$		$-$	
$A(x)$		$-$		$+$		$-$	

$\boxed{\text{Et finalement } A(x) > 0 \text{ pour } x \in \left]-\dfrac{3}{8}; \dfrac{3}{8}\right[}$

Géométrie

1. On utilise les formules pour trouver les coordonnées des vecteurs :
$x_{\overrightarrow{AB}} = x_B - x_A = 6 - 2 = 4$
$y_{\overrightarrow{AB}} = y_B - y_A = 1 - (-1) = 2$

$\boxed{\text{Ainsi } \overrightarrow{AB}(4; 2)}$

On a alors $\left\| \overrightarrow{AB} \right\| = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{16 + 4}$

Rappel : $\left\| \vec{u} \right\| = \sqrt{\left(x_{\vec{u}}\right)^2 + \left(y_{\vec{u}}\right)^2}$

$\boxed{\text{Et } \left\| \overrightarrow{AB} \right\| = \sqrt{20}}$

De même :
$x_{\overrightarrow{BC}} = x_C - x_B = 4 - 6 = -2$
$y_{\overrightarrow{BC}} = y_C - y_B = 5 - 1 = 4$

$\boxed{\text{Et donc } \overrightarrow{BC}(-2;4)}$

Comme précédemment $\left\| \overrightarrow{CD} \right\| = \sqrt{(-2)^2 + 4^2} = \sqrt{4+16}$

$\boxed{\text{D'où } \left\| \overrightarrow{CD} \right\| = \sqrt{20}}$

Les questions précédentes nous donne que $\left\| \overrightarrow{AB} \right\| = \left\| \overrightarrow{CD} \right\|$ ou plus simplement $AB = CD$.

De plus, $\overrightarrow{AB} . \overrightarrow{BC} = 4 \times (-2) + 2 \times 4 = -8 + 8 = 0$.
Ceci permet de conclure que $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BC}$

<u>Rappel :</u> $\overrightarrow{u} . \overrightarrow{v} = x_{\overrightarrow{u}} x_{\overrightarrow{v}} + y_{\overrightarrow{u}} y_{\overrightarrow{v}}$ et $\overrightarrow{u} . \overrightarrow{v} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}$.

$\boxed{\text{Ces 2 résultats nous permettent de conclure que } ABC \text{ est un triangle isocèle et rectangle en } B.}$

2. I est le milieu de $[AC]$, donc ses coordonnées sont données par :
$x_I = \dfrac{x_A + x_C}{2} = \dfrac{2+4}{2} = 3$
$y_I = \dfrac{y_A + y_C}{2} = \dfrac{-1+5}{2} = 2$

$\boxed{\text{Et donc les coordonnées de } I \text{ sont } (3;2)}$

Calculons maintenant les coordonnées de J est le milieu de $[AB]$
$x_J = \dfrac{x_A + x_B}{2} = \dfrac{2+6}{2} = 4$
$y_J = \dfrac{y_A + y_B}{2} = \dfrac{-1+1}{2} = 0$

$\boxed{\text{Finalement } J\,(4;0)}$

On a $x_C = x_J = 4$ et ainsi l'équation de la droite (CJ) est $x = 4$
Par définition, G est sur (CJ).

$\boxed{\text{L'abscisse de } G \text{ est donc } x_G = 4.}$

<u>Attention :</u> L'énoncé contient une faute de frappe et on cherche un réel m telle que $\overrightarrow{GB} = m\overrightarrow{GI}$
En s'inspirant de la proposition de l'énoncé, mais en l'adaptant légèrement, on considère les points H et H' comme sur la figure ci-dessous, tels que :
$H\,(3;1)$ définit un triangle rectangle BHI et H' est l'intersection de (BH) et (GJ). On déduit $H'\,(4;1)$.
On a donc GBH' rectangle et $(GH')//(IH)$

En appliquant le théorème de Thalès, on trouve : $\dfrac{BG}{BI} = \dfrac{BH'}{BH} = \dfrac{2}{3}$.

Donc $3BG = 2BI = 2(BG + GI)$ et $BG = 2GI$

Avec cette relation sur les normes, comme les vecteurs sont de sens opposés, on déduit :

$\boxed{\overrightarrow{GB} = -2\overrightarrow{GI}}$

3. Par construction de D :

$x_I = \dfrac{x_D + x_B}{2}$ ou $x_D = 2x_I - x_B = 6 - 6 = 0$

et $y_D = 2y_I - y_B = 4 - 1 = 3$

$\boxed{\text{Les coordonnées de } D \text{ sont } (0;3)}$

Reprenons les éléments que nous connaissons sur la figure :

I est le milieu de $\left[AC\right]$, donc (BI) est la médiane issue de B. Mais comme ABC est isocèle en B, (BI) est également la hauteur issue de $\left[AC\right]$. Donc $(BI) \perp (AC)$.

Par construction, I est également le milieu de $[BD]$.

Donc $ABCD$ a ses diagonales perpendiculaires et qui se coupent en leur milieu, c'est donc un losange.

$\boxed{\text{Comme il possède un angle droit, c'est un carré.}}$

4. Attention : une nouvelle faute de frappe se glisse. Le point définit n'est pas sur le cercle considéré.

Nous considérerons le point E tel que $\overrightarrow{DE} = 4\overrightarrow{i} - 4\overrightarrow{j}$

Le cercle considéré est nécessairement le cercle circonscrit à $ABCD$ dont le centre est I.

Son rayon est : $r = IB = \sqrt{(6-3)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{10}$ (on peut évidemment prendre n'importe quelle autre sommet du carré pour le calcul).

Trouvons maintenant les coordonnées de E pour calculer IE :

On sait que $\overrightarrow{DE}$ a pour coordonnées $(4; -4)$, d'où :

$x_E - x_D = x_E - 0 = 4$

$y_E - y_D = y_E - 3 = -4$ et $y_E = -1$

Finalement on trouve $E(4; -1)$

Cela donne $IE = \sqrt{(-1-2)^2 + (4-3)^2} = \sqrt{10}$

$\boxed{\text{Et } A,\ B,\ C,\ D \text{ et } E \text{ sont sur le cercle de centre } I \text{ et de rayon } \sqrt{10}}$

5. ECA est un triangle rectangle, on peut donc utiliser les formules de trigonométrie.

$\sin\left(\widehat{ACE}\right) = \dfrac{AE}{AC} = \dfrac{2}{2\sqrt{10}} = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$ (on a $AC = 2AI$)

$\cos\left(\widehat{ACE}\right) = \dfrac{EC}{AC} = \dfrac{6}{2\sqrt{10}} = \dfrac{3}{\sqrt{10}}$

$$\tan\left(\widehat{ACE}\right) = \frac{AE}{EC} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$\boxed{\text{Ce qui donne } \widehat{ACE} \approx 18.4°}$

<u>Figure :</u>