Baccalauréat S Asie juin 1996

EXERCICE 1 **4 points**

Dans cet exercice, les résultats demandés seront donnés sous forme de fractions.

On dispose de trois dés à 6 faces, parfaitement équilibrés.
Sur le premier, 2 faces sont bleues ; sur le deuxième, 3 faces sont bleues ; sur le troisième, 5 faces sont bleues ; les autres faces sont rouges.

Partie A

Dans un premier temps, on considère le premier dé. On le lance 5 fois de suite, les lancers sont indépendants.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir 4 fois une face bleue et une face rouge dans cet ordre ?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir 4 fois une face bleue et une face rouge ?
3. Quelle est la probabilité d'avoir au moins une face bleue ?

Partie B

On considère maintenant les trois dés.

1. On prend au hasard et de façon équiprobable l'un des trois dés et on le lance. Quelle est la probabilité d'obtenir une face bleue ?
2. Quelle est la probabilité d'avoir lancé le troisième dé sachant que l'on a obtenu une face bleue ?

EXERCICE 2 **5 points**
Enseignement obligatoire

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$ [unité graphique 2 cm].
À tout complexe z, distinct de 4, on associe le nombre :

$$Z = \frac{\text{i}z - 4}{z - 4}.$$

On note A le point d'affixe 4 et on considère l'ensemble $\mathscr{C}$ des points M du plan, distincts de A, et d'affixe z telle que Z soit un nombre réel.
On se propose de déterminer et de construire cet ensemble $\mathscr{C}$ par deux méthodes différentes.

1. *Méthode analytique*

   a. On pose : $z = x + \text{i}y$ et $Z = X + \text{i}Y$ avec x, y, X, Y réels. Exprimer X et Y en fonction de x et y.

   b. Écrire une équation cartésienne de $\mathscr{C}$. Reconnaître la nature de $\mathscr{C}$ et caractériser cet ensemble. Construire $\mathscr{C}$.

2. *Méthode géométrique*
   On considère le point B d'affixe -4i.

   a. Vérifier que $\dfrac{\text{i}z - 4}{z - 4}$ est réel si et seulement si le nombre $\dfrac{z + 4\text{i}}{z - 4}$ est imaginaire pur. On pourra remarquer que :

   $$\text{i}z - 4 = \text{i}(z + 4\text{i}).$$

   b. Quelles sont les affixes des vecteurs $\overrightarrow{\text{A}M}$ et $\overrightarrow{\text{B}M}$? En interprétant géométriquement la condition ci-dessus, établir que M appartient à $\mathscr{C}$ si et seulement si $\overrightarrow{\text{A}M}$ et $\overrightarrow{\text{B}M}$ sont orthogonaux.
   En déduire la nature de $\mathscr{C}$, et caractériser cet ensemble.

EXERCICE 2 **5 points**

Enseignement de spécialité

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, unité graphique : 2 cm.

1. Étude d'une courbe paramétrée $\mathcal{C}$

On considère la courbe $\mathcal{C}$ définie paramétriquement par : t2

$$\left\{\begin{array}{lllll} x & = & f(t) & = & \frac{t^2}{2}+t \\ y & = & g(t) & = & -\frac{t^2}{2}+t \end{array}\right. \quad t \in \mathbb{R}.$$

a. Étudier conjointement les variations sur $\mathbb{R}$ des fonctions f et g.

b. Préciser les points de $\mathcal{C}$ où la tangente est parallèle à l'un des axes de coordonnées.

c. Préciser les points d'intersection de $\mathcal{C}$ avec chacun des axes Ox et Oy.
Donner un vecteur directeur des tangentes aux points obtenus. Dessiner $\mathcal{C}$.

2. On se propose de démontrer que la courbe $\mathcal{C}$ est une parabole, en étudiant son image par une transformation particulière du plan.

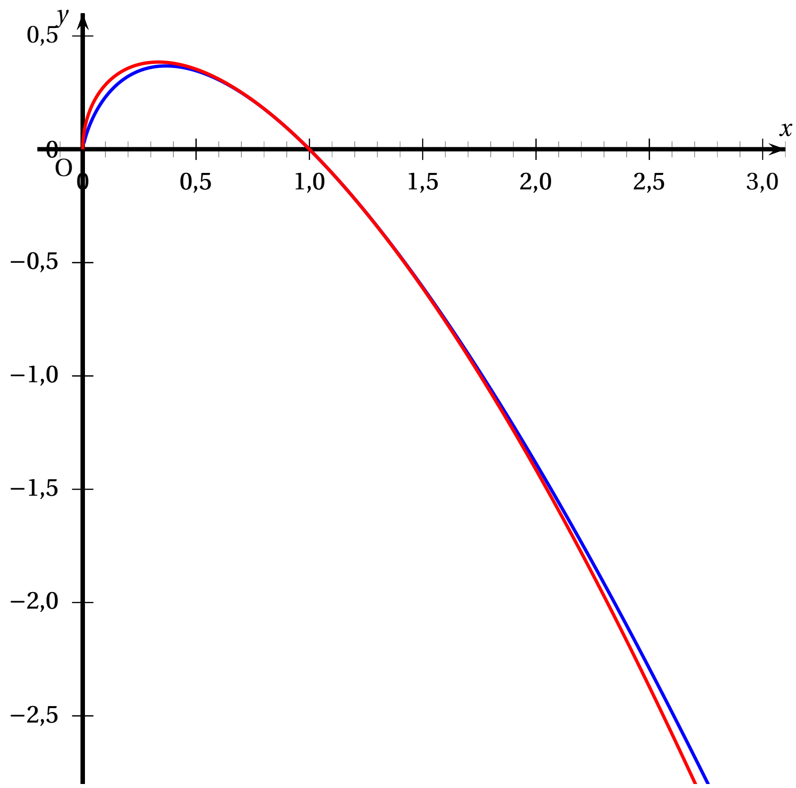
a. Le plan est assimilé au plan complexe. On considère l'application R qui, à tout point M du plan d'affixe z, associe le point M' d'affixe $z' = \dfrac{(1+\mathrm{i})}{\sqrt{2}}z$.
Quelle est la nature de R ? Déterminer ses éléments géométriques.

b. Calculer en fonction de t l'affixe de M' lorsque M est le point d'affixe : $f(t) + \mathrm{i}g(t)$. En déduire l'expression en fonction de t des coordonnées x' et y' du point M'. Écrire une équation cartésienne de la courbe $\mathcal{C}'$ image par R de la courbe $\mathcal{C}$. Représenter $\mathcal{C}'$ sur la même figure que $\mathcal{C}$.
Pourquoi peut-on affirmer que $\mathcal{C}$ est une parabole ?

PROBLÈME **11 points**

Le graphique ci-dessous présente dans un même repère orthonormal le tracé de deux courbes, $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.
L'une, la courbe $\mathcal{C}_f$ est la courbe représentative de la fonction f définie sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$ par : $x \longmapsto f(x) = (1-x)\sqrt{x}$.
L'autre, la courbe $\mathcal{C}_g$, représente la fonction g définie sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$ par :

$$\left\{\begin{array}{lll} g(x) & = & -x\ln x \quad \text{pour } x \text{ strictement positif} \\ g(0) & = & 0 \end{array}\right.$$



Partie A - Le but de cette partie est de déterminer quel est le tracé de $\mathscr{C}_f$ et quel est celui de $\mathscr{C}_g$.

Comparaison des deux fonctions f et g

On s'intéresse à la différence : $f(x) - g(x)$ et on se propose d'en étudier le signe. À cet effet, on pose pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$:

$$\varphi(x) = \frac{f(x) - g(x)}{x}$$

1. Vérifier que : $\varphi(x) = \ln x - \sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.Calculer la fonction dérivée φ' de φ et vérifier que : $\varphi'(x) = -\dfrac{\left(\sqrt{x}-1\right)^2}{2x\sqrt{x}}$.

   Que est le sens de variation de φ sur $[0\,;\,+\infty[$? (L'étude des limites de φ aux bornes de son domaine de définition n'est pas demandée).
2. Calculer $\varphi(1)$ puis déterminer le signe de la différence $f(x) - g(x)$ sur $[0\,;\,+\infty[$.
3. En déduire les positions relatives des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$. Identifier sur le graphique chacune de ces deux courbes.

Partie B - Calcul d'intégrales

Pour tout réel a de l'intervalle $]0\,;\,1]$ on pose :

$$I(a) = \int_a^1 f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad J(a) = \int_a^1 g(x)\,\mathrm{d}x.$$

1. Calculer l'intégrale $I(a)$ en fonction de a. À cet effet, on pourra remarquer que $f(x)$ peut s'écrire :

$$f(x) = x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{3}{2}}.$$

2. À l'aide d'une intégration par parties, calculer $J(a)$ en fonction de a.

3. **a.** Calculer :

$\lim\limits_{a\to 0}(I(a) - J(a))$. [On admettra que $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2 \ln x\right) = 0$].

b. Donner une interprétation géométrique de cette limite.

Partie C - On considère l'équation, définie dans $\mathbb{R}^+$ par : $g(x) = -24$. Dans cette partie, on se propose de déterminer une valeur approchée de la solution α de cette équation.

1. Justifier que l'équation proposée a dans $\mathbb{R}^+$ une solution α et une seule et que : $9 < \alpha < 11$.
Vérifier que α est solution de l'équation :

$$x = \frac{24}{\ln x}.$$

2. Soit h la fonction définie sur $[9\,;\,11]$ par :

$$h(x) = \frac{24}{\ln x}.$$

a. Démontrer, que pour tout réel x de l'intervalle $[9\,;\,11]$, $h(x)$ appartient aussi à l'intervalle $[9\,;\,11]$.

b. Démontrer, pour tout x de l'intervalle $[9\,;\,11]$, la double inégalité :

$$\left|h'(x)\right| \leqslant \frac{2}{3(\ln 3)^2} < 0,56.$$

c. En déduire, pour tout réel x de l'intervalle $[9\,;\,11]$, l'inégalité :

$$|h(x) - h(\alpha)| \leqslant 0,56|x - \alpha|.$$

3. On considère la suite (u_n) définie par récurrence :

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_0 & = & 9 \\ u_{n+1} & = & h\left(u_n\right) \quad \text{pour tout entier naturel } n. \end{array}\right.$$

a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, u_n appartient à l'intervalle $[9\,;\,11]$, puis que l'inégalité $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant 0,56\,|u_n - \alpha|$ est vérifiée.

b. En déduire, que, pour tout entier naturel n l'inégalité $|u_n - \alpha| \leqslant 2(0,56)^n$ est vérifiée. Démontrer que la suite (u_n) converge vers α.

c. Trouver le plus petit entier naturel n pour lequel on a l'inégalité :

$$2(0,56)^n < 0,01.$$

Soit n_0 cet entier, que représente pour α le terme u_{n_0} correspondant ?
À l'aide de votre calculatrice, donner une approximation décimale à 10^{-2} près de u_{n_0}.