DM 1ère - Second degré

Exercice 1 :

1. On étudie $x^2 - \left(5 + \sqrt{3} + 2\sqrt{5}\right)x + \left(2 + \sqrt{3}\right)\left(3 + 2\sqrt{5}\right) = 0$

On sait qu'un trinôme qui possède 2 racines distinctes peut s'écrire : $x^2 - Sx + P$ où S représente la somme des racines et P leur produit.

<u>Remarque 1 :</u> ce résultat se retrouve en développant la forme factorisé du trinôme
<u>Remarque 2 :</u> la « formule » est également valable pour une unique racine en considérant que les 2 racines ont la même valeur. On nomme d'ailleurs cette racine unique racine « double ».

On a donc (en gardant les même notations que précédemment) :
$S = 5 + \sqrt{3} + 2\sqrt{5}$
$P = \left(2 + \sqrt{3}\right)\left(3 + 2\sqrt{5}\right)$

2. On déduit de la question précédente :

$\boxed{x_1 = 2 + \sqrt{3} \text{ et } x_2 = 3 + 2\sqrt{5}}$

Exercice 2 :

On considère le système S définit par :
$\begin{cases} x + y = 3 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = -\frac{3}{4} \end{cases}$ avec $x \neq 0$ et $y \neq 0$ (je ne renoterai pas systématiquement cette hypothèse pour ne pas alourdir la rédaction)

$S \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 - x \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{3-x} = -\frac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 - x \\ \frac{3-x+x}{x(3-x)} = -\frac{3}{4} \end{cases}$ $S \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 - x \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{3-x} = -\frac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 - x \\ \frac{3-x+x}{x(3-x)} = -\frac{3}{4} \end{cases}$
$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 - x \\ \frac{3}{x(3-x)} = -\frac{3}{4} \end{cases}$

(On note que l'hypothèse $y \neq 0$ nous assure que $x \neq 3$)

Concentrons-nous dans un premier temps sur la 2ème égalité :
$$\frac{3}{x\,(3-x)} = -\frac{3}{4} \Leftrightarrow 3x\,(x-3) = 12 \Leftrightarrow 3x^2 - 9x - 12 = 0$$

On remarque que -1 est racine évidente de l'équation. En factorisant, on trouve :
$3x^2 - 9x - 12 = 3\,(x+1)\,(x-4)$
On a donc 2 solutions, $x_1 = -1$ et $x_2 = 4$.

<u>Remarque 1 :</u> on peut évidemment utiliser Δ pour trouver les solutions.
$\Delta = (-9)^2 - 4 \times (-12) \times 3 = 81 + 144 = 225.$
Je vous laisser vérifier qu'on retrouve bien les mêmes racines !

En remplaçant les 2 solutions dans la première équation du système on trouve $y_1 = 4$ et $y_2 = -1$
Remarque 2 : on note que la somme des racines de l'équation étudiée est égale à 3. C'est une bonne nouvelle, le système à résoudre étant symétrique entre x et y.

$\boxed{\text{Finalement, les solutions du système sont } (-1,4) \text{ et } (4,-1).}$

Exercice 3 :

Notons l, la longueur de la barre en centimètres.
La hauteur de la porte est donc $l - 20$ et sa largeur $l - 40$.

On applique le théorème de Pythagore sur la diagonale de la porte, qui nous donne :
$l^2 = \left(l-20\right)^2 + \left(l-40\right)^2$

Or $\left(l-20\right)^2 + \left(l-40\right)^2 = l^2 - 40l + 400 + l^2 - 80l + 1600 = 2l^2 - 120l + 2000$

On doit donc résoudre :
$l^2 = 2l^2 - 120l + 2000$ ou $l^2 - 120l + 2000 = 0$
$\Delta = (-120)^2 - 4 \times 2000 = 14400 - 8000 = 6400$

On trouve les solutions : $l_1 = 20$ et $l_2 = 100$

l_1 ne peut pas être la bonne solution, car la porte aurait une hauteur nulle et une largeur négative !

$\boxed{\text{La barre mesure donc } 1 \text{ mètre et la porte, } 80 \text{ cm de hauteur et } 60 \text{ de largeur.}}$

Exercice 4 :

1. L'équation de $\mathscr{P}_1$ est $y = -\dfrac{1}{2}x^2 + 2x = -\dfrac{1}{2}x\,(x-4)$

$\boxed{\text{L'abscisse de } A \text{ est donc } 4.}$

2. Les solutions de l'équation de $\mathscr{P}_2$ est $y = a\,(x-4)\,(x-7)$ compte-tenu des abscisses de A et B
Le sommet de la parabole est atteint en 5.5 avec une hauteur de 1.5.

On doit donc résoudre $-a\left(1.5\right)^2 = 1.5$, ce qui donne $a = -\dfrac{2}{3}$.

$\boxed{\text{Finalement, l'équation de } \mathscr{P}_2 \text{ est } y = -\dfrac{2}{3}\,(x-4)\,(x-7).}$

Exercice 5 :

1. On remarque que :

$\boxed{\phi - 2 = \dfrac{2}{\phi}}$

2. $\phi - 2 = \dfrac{2}{\phi} \Leftrightarrow \phi\left(\phi - 2\right) = 2 \Leftrightarrow \phi^2 - 2\phi - 2 = 0$
$\Delta = 4 + 8 = 12$

Ce qui nous donne 2 solutions pour l'équation

$\phi_1 = \dfrac{2 - 2\sqrt{3}}{2} = 1 - \sqrt{3} < 0$ et $\phi_2 = 1 + \sqrt{3}$

$\boxed{\text{Par définition, } \phi > 0 \text{ et donc } \phi = 1 + \sqrt{3}}$