Exercice 158 :

Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dérivables en 0.

On suppose que les graphes des 3 fonctions $f,\ g$ et $\dfrac{fg}{2}$ ont même tangente au point d'abscisse 0. Quelles sont les équations possibles pour cette tangente ?

Solution :

Écrivons les 3 équations correspondants à ces fonctions :
Pour f : $y = xf'(0) + f(0)$
Pour g : $y = xg'(0) + g(0)$
Pour $\dfrac{fg}{2}$: $y = \left(\dfrac{fg}{2}\right)'(x) + \dfrac{fg}{2}(0) = \dfrac{1}{2}\left[\left(f'(0)g(0) + f(0)g'(0)\right)x + f(0)g(0)\right]$

On a donc en particulier : $\dfrac{f(0)g(0)}{2} = f(0) = g(0)$
Ce qui donne 2 possibilités : $f(0) = g(0) = 2$ ou $f(0) = g(0) = 0$.

Remarque : pour trouver le résultat $f(0) = g(0) = 2$ il faut supposer que les 2 sont non nuls. Il faut donc ensuite vérifier si 0 est également solution.

Regardons l'identification des termes en x :
$f'(0) = g'(0) = \dfrac{1}{2}\left(f'(0)g(0) + f(0)g'(0)\right)$

Procédons maintenant à une disjonction de cas :
- $\underline{f(0) = g(0) = 0 :}$

On obtient : $f'(0) = g'(0) = 0$

La tangente est alors la fonction constante $y = 0$

- $\underline{f(0) = g(0) = 2 :}$

Cela donne $f'(0) = g'(0) = f'(0) + g'(0)$

Cela donne également $f'(0) = g'(0) = 0$.

$\boxed{\text{Finalement, les 2 possibilités pour la tangente commune à ces 3 fonctions est } y = 0 \text{ ou } y = 2.}$

Exercice 159 :

Soient a un réel non nul et f la fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto ax^2$.
Si p et q sont 2 nombres réels, on note $\Delta_{p,q}$ la droite d'équation $y = px + q$.

Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $\Delta_{p,q}$ soit tangente au graphe de f.

Solution :

On sait que $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 2ax$.

Donc l'équation d'une tangente au graphe de f au point x_0 est de la forme : $y = 2a\left(x - x_0\right) + x_0^2$.

Pour que $\Delta_{p,q}$ soit tangente au graphe de f, il faut donc que $2a\left(x - x_0\right) + x_0^2 = px + q$

Ou $2ax + x_0^2 - 2ax_0 = px + q$

Ce qui donne par identification : $\begin{cases} 2a = p \\ x_0^2 - 2a\,x_0 = q \end{cases}$

Et réciproquement, en choisissant $p = 2a$ et $q = x_0^2 - 2a\,x_0$, $\Delta_{p,q}$ est tangente au graphe de f au point x_0.

$\boxed{\text{Donc } \Delta_{p,q} \text{ est tangente au graphe de } f \text{ au point } x_0 \text{ ssi } p = 2a \text{ et } q = x_0^2 - 2a\,x_0.}$

Exercice 160 :

a. Soient f une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et x_0 un élément de I tel que $f'\left(x_0\right) \neq 0$.
Calculer l'abscisse du point x_1 en lequel la tangente au graphe de f au point d'abscisse x_0 coupe l'axe (Ox).

b. On suppose que a est un nombre réel positif, que f est la fonction définie par $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x^2 - a$.
Avec les notations précédentes vérifier que $x_1 = \dfrac{1}{2}\left(x_0 + \dfrac{a}{x_0}\right)$

Solution :

a. Reprenons l'équation de la tangente au graphe d'une fonction au point d'abscisse x_0 :
$y = f'\left(x_0\right)\left(x - x_0\right) + f\left(x_0\right)$

Par définition de x_1, $f'\left(x_0\right)\left(x_1 - x_0\right) + f\left(x_0\right) = 0$
Et donc $x_1 f'\left(x_0\right) = x_0 f'\left(x_0\right) - f\left(x_0\right)$

$\boxed{\text{On conclut } x_1 = x_0 - \dfrac{f\left(x_0\right)}{f'\left(x_0\right)}}$

b. Comme $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x^2 - a$, on a $f'(x) = 2x$.

En reprenant la formule de la question précédente, on trouve :
$x_1 = x_0 - \dfrac{x_0^2 - a}{2x_0} = x_0 - \dfrac{1}{2}x_0 + \dfrac{1}{2} \times \dfrac{a}{x_0}$

$\boxed{\text{D'où le résultat cherché : } x_1 = \dfrac{1}{2}\left(x_0 + \dfrac{a}{x_0}\right)}$

Exercice 161 :

Calcul d'une racine carrée par la méthode de Newton.

Soit a dans $\mathbb{R}_+^*$. La suite $\left(u_n\right)_{n \geqslant 0}$ est définie par son premier terme u_0, élément de $\mathbb{R}_+^*$ et par la relation de récurrence :
$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{a}{u_n}\right) = f_a\left(u_n\right)$ où la fonction f_a est définie par :
$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f_a(x) = \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{a}{x}\right)$.

a. Étudier f_a et donner l'allure de son graphe.

b. Justifier que la suite $\left(u_n\right)_{n \geqslant 0}$ est bien définie et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.

c. Etablir les inégalités :

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f_a(x) \geqslant \sqrt{a}$

$\forall x \in \left[\sqrt{a}, +\infty\right[,\ f_a(x) \leqslant x$

d. Montrer que la suite $\left(u_n\right)_{n \geqslant 1}$ est décroissante, puis qu'elle converge vers $\sqrt{a}$.

e. Pour n dans $\mathbb{N}$, on pose $v_n = \dfrac{u_n - \sqrt{a}}{u_n + \sqrt{a}}$

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = v_n^2$.

f. Exprimer v_n en fonction de n.

g. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant u_n - \sqrt{a} \leqslant \left(u_1 + \sqrt{a}\right)\left(\dfrac{u_0 - \sqrt{a}}{u_0 + \sqrt{a}}\right)^{2^n}$

Conclure que $\left(u_n\right)_{n \geqslant 0}$ converge vers $\sqrt{a}$.

h. On prend $a = 2$, $u_0 = 1$.Représenter graphiquement f_2 et les premiers termes de la suite $\left(u_n\right)_{n \geqslant 0}$.
Écrire l'inégalité précédente dans ce cas. Comment choisir n pour obtenir une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à 10^{-5} près. Faire les calculs correspondants.

Solution :

a. f_a est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, comme somme de fonctions qui le sont.
On rappelle que a dans $\mathbb{R}_+^*$.

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f_a'(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{a}{x^2}\right)$$

f_a' s'annule pour $x = \sqrt{a}$, est négative pour $x \leqslant \sqrt{a}$ et positive pour $x \geqslant \sqrt{a}$

On a de plus : $\lim\limits_{x \to 0} f_a(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f_a(x) = +\infty$, ainsi que $f_a\left(\sqrt{a}\right) = \sqrt{a}$

(<u>Remarque :</u> *je n'insiste pas sur les variations et limites, qui ne présentent pas de fome indéterminée, n'hésitez pas à poser les calculs si besoin*)

Ainsi, on a le tableau de variations :

x	0		$\sqrt{a}$		$+\infty$
f_a'		$-$	0	$+$	
f_a	$+\infty$	$\searrow$	$\sqrt{a}$	$\nearrow$	$+\infty$

Pour la dernière question, nous représenterons f_5 en plus de f_2

b. En utilisant la question précédente, procédons par récurrence :
<u>Initialisation :</u> Par définition de $\left(u_n\right)_{n \geqslant 0}$, u_0 est dans $\mathbb{R}_+^*$

Hérédité : Supposons que u_n soit dans $\mathbb{R}_+^*$ et étudions u_{n+1}.
$u_{n+1} = f_a\left(u_n\right) > 0$ d'après l'étude de la question précédente.

Remarque : le fait que f_a ne s'annule pas nous assure la définition de $\left(u_n\right)_{n\geqslant 0}$.

On peut donc conclure que $\left(u_n\right)_{n\geqslant 0}$ est bien définie et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.

c. La première inégalité est immédiate avec l'étude de la fonction.

On a bien $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f_a(x) \geqslant \sqrt{a}$

Pour la 2ème inégalité, étudions la quantité $\dfrac{f_a(x)}{x} = \dfrac{1}{2}\left(1 + \dfrac{a}{x^2}\right)$

On sait que $x \mapsto \dfrac{a}{x^2}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et vaut 1 pour $x = \sqrt{a}$.

Cela nous indique donc que $\forall x \in \left[\sqrt{a}, +\infty\right[,\ \dfrac{f_a(x)}{x} \leqslant 1$

Et finalement $\forall x \in \left[\sqrt{a}, +\infty\right[,\ f_a(x) \leqslant x$

d. u_0 est fixé dans $\mathbb{R}_+^*$.
En utilisant la question précédente :
On obtient d'abord que $u_1 \in \left[\sqrt{a}, +\infty\right[$.

On utilise ensuite la 2ème inégalité pour obtenir : $\sqrt{a} \leqslant u_2 = f_a\left(u_1\right) \leqslant u_1$
Cela initialise la récurrence, dont on montre l'hérédité :
Si $\sqrt{a} \leqslant u_n = f_a\left(u_{n-1}\right) \leqslant u_{n-1}$ alors, grâce une nouvelle fois à la question précédente :
$\sqrt{a} \leqslant u_{n+1} = f_a\left(u_n\right) \leqslant u_n$.
Donc $\left(u_n\right)_{n\geqslant 1}$ est décroissante.

De plus, nous avons vu également que $\left(u_n\right)_{n\geqslant 1}$ est minorée par $\sqrt{a}$, donc convergente.
Or, si elle converge, c'est nécessairement vers un point fixe de f_a et donc vers $\sqrt{a}$.

On conclut finalement que $\left(u_n\right)_{n\geqslant 1}$ est décroissante et converge vers $\sqrt{a}$.

e. Les questions précédentes nous permettent de vérifier rapidement que $\left(v_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.

De plus : $v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1} - \sqrt{a}}{u_{n+1} + \sqrt{a}} = \dfrac{\frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right) - \sqrt{a}}{\frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right) + \sqrt{a}} = \dfrac{\frac{\left(u_n\right)^2 + a - 2u_n\sqrt{a}}{2u_n}}{\frac{\left(u_n\right)^2 + a + 2u_n\sqrt{a}}{2u_n}} = \dfrac{\left(u_n - \sqrt{a}\right)^2}{\left(u_n + \sqrt{a}\right)^2} = \left(v_n\right)^2$

Et donc $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = v_n^2$

f. On a $v_0 = \dfrac{u_0 - \sqrt{a}}{u_0 + \sqrt{a}}$.

On trouve ensuite, par le résultat précédent, $v_1 = \left(v_0\right)^2$, $v_2 = \left(v_1\right)^2 = \left(v_0\right)^4$, $v_3 = \left(v_2\right)^2 = \left(v_1\right)^4 = \left(v_0\right)^6$ et ainsi de suite.

Par une récurrence immédiate, on obtient $v_n = \left(v_0\right)^{2^n}$

<u>Remarque :</u> le terme « récurrence immédiate » est à éviter dans la mesure du possible, car il sert trop souvent à tenter de masquer une difficulté que l'élève n'a pas vue, ou pire, tentée de cacher ! Ici, on met des termes au carré, j'estime donc qu'on peut se permettre.

Finalement, on a $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \left(\dfrac{u_0 - \sqrt{a}}{u_0 + \sqrt{a}}\right)^{2^n}$

g. La première inégalité correspond à ce qui a déjà été vu à la question d, on peut donc écrire : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant u_n - \sqrt{a}$.

De plus, par définition de v_n, on a $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n - \sqrt{a} = \left(u_n + \sqrt{a}\right) v_n = \left(u_n + \sqrt{a}\right)\left(\dfrac{u_0 - \sqrt{a}}{u_0 + \sqrt{a}}\right)^{2^n}$

Et comme $\left(u_n\right)_{n \geqslant 1}$ est décroissante, on conclut :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant u_n - \sqrt{a} \leqslant \left(u_1 + \sqrt{a}\right)\left(\frac{u_0 - \sqrt{a}}{u_0 + \sqrt{a}}\right)^{2^n}$$

De plus, comme $u_0 > 0$, $\left|\dfrac{u_0 - \sqrt{a}}{u_0 + \sqrt{a}}\right| < 1$

Et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{u_0 - \sqrt{a}}{u_0 + \sqrt{a}}\right)^{2^n} = 0$

D'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n - \sqrt{a} = 0$.

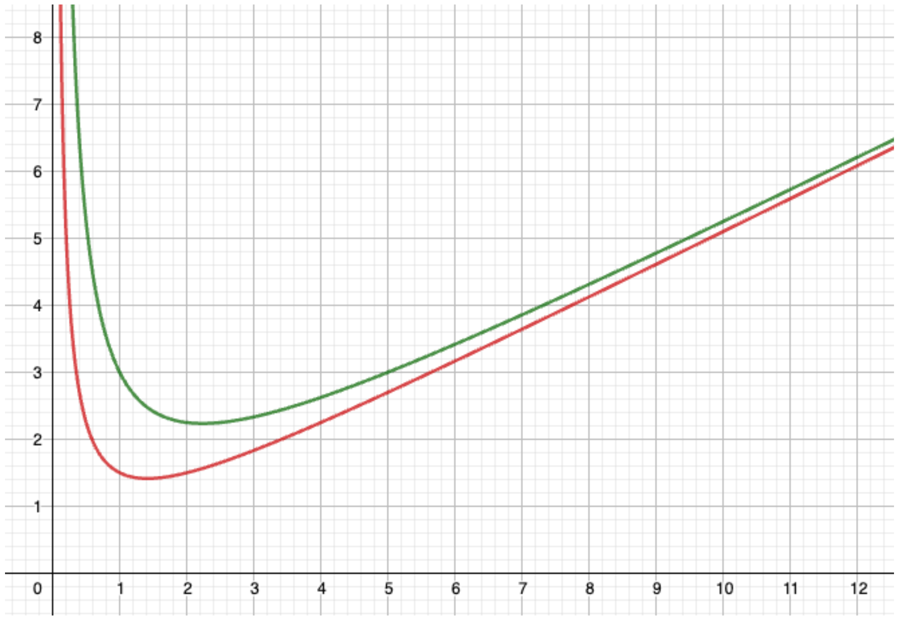
Et on conclut que $\left(u_n\right)_{n \geqslant 0}$ converge vers $\sqrt{a}$.

h. Comme proposé à la question a, nous représentons f_5 (courbe verte) en plus de f_2 (courbe rouge) demandée à cette question.

Calculons les premiers termes de $\left(u_n\right)_{n \geqslant 0}$ pour $a = 2$ et $u_0 = 1$

$u_1 = \dfrac{3}{2}$

$u_2 = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3}{2} + \dfrac{4}{3}\right) = \dfrac{17}{12}$



$$u_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{17}{12} + \frac{24}{17}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{289}{204} + \frac{288}{204}\right) = \frac{577}{408} \approx 1.414215$$

L'inégalité devient : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant u_n - \sqrt{2} \leqslant \left(\frac{3}{2} + \sqrt{2}\right)\left(\frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\right)^{2^n}$

De plus $\frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} = -\left(1-\sqrt{2}\right)^2$

Et donc on a $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant u_n - \sqrt{2} \leqslant \left(\frac{3}{2} + \sqrt{2}\right)\left(1-\sqrt{2}\right)^{2^{n+1}}$

On cherche donc $\left(\frac{3}{2} + \sqrt{2}\right)\left(1-\sqrt{2}\right)^{2^{n+1}} \leqslant 10^{-5}$

On passe l'inégalité au logarithme (qui est une fonction croissante) en faisant attention à la valeur négative de $1 - \sqrt{2}$, mais on peut considérer son opposé puisque la quantité est élevée à une puissance de 2.

On cherche donc : $\ln\left(\frac{3}{2} + \sqrt{2}\right) + 2^{n+1}\ln\left(1-\sqrt{2}\right) \leqslant -5\ln(10)$

D'où $2^{n+1}\ln\left(1-\sqrt{2}\right) \leqslant -5\ln(10) - \ln\left(\frac{3}{2} + \sqrt{2}\right)$

Attention en divisant, $\ln\left(1-\sqrt{2}\right)$ est une quantité négative !

Finalement : $2^{n+1} \geqslant -\dfrac{5\ln(10) + \ln\left(3 + 2\sqrt{2}\right) - \ln(2)}{\ln\left(1-\sqrt{2}\right)} \approx 14.28$

Ce qui donne $n = 3$, la convergence est très rapide !