

Manipulation des racines carrées - 2nde

Exercice 1 :

Calculer

$$A = \sqrt{32} \times \sqrt{2}$$

$$B = \sqrt{4.9} \times \sqrt{10}$$

$$C = \sqrt{0.1} \times \sqrt{0.1}$$

$$D = \sqrt{250} \times \sqrt{10^3}$$

$$E = \frac{\sqrt{72}}{\sqrt{2}}$$

$$F = \frac{\sqrt{125}}{\sqrt{5}}$$

$$G = \sqrt{\frac{7}{8}} \times \sqrt{56}$$

$$H = \frac{\sqrt{63}}{\sqrt{8}} \times \sqrt{\frac{2}{7}}$$

$$I = (\sqrt{7})^2$$

$$J = (\sqrt{7})^3$$

$$K = (4\sqrt{2})^2$$

$$L = \left(\frac{\sqrt{4}}{3}\right)^2$$

$$M = \left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right)^2$$

$$N = \left(\sqrt{\frac{4}{3}}\right)^2$$

$$O = \left(\frac{3\sqrt{6}}{4}\right)^2$$

$$P = \sqrt{36 + 64}$$

$$Q = \sqrt{36} + \sqrt{64}$$

$$R = \sqrt{169} - \sqrt{144}$$

$$S = \sqrt{169 - 144}$$

Solution :

Dans cet exercice on va utiliser principalement la propriété $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ ainsi que son pendant avec

les divisions $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$.

Cela donne également $\sqrt{a^b} = (\sqrt{a})^b$.

Remarque : comme pour les identités remarquables, ces propriétés sont à maîtriser dans les 2 sens.

Les racines carrées permettent donc des manipulations « naturelles » avec la multiplication et la division. Par contre, cela ne fonctionne pas pour les additions ou soustractions, ce qu'on revoit dans les dernières questions. $\sqrt{a} + \sqrt{b} \neq \sqrt{a+b}$ et $\sqrt{a} - \sqrt{b} \neq \sqrt{a-b}$, sauf dans des cas particuliers !

$$A = \sqrt{32} \times \sqrt{2} = \sqrt{32 \times 2} = \sqrt{64} = 8$$

$$B = \sqrt{4.9} \times \sqrt{10} = \sqrt{4.9 \times 10} = \sqrt{49} = 7$$

$$C = \sqrt{0.1} \times \sqrt{0.1} = (\sqrt{0.1})^2 = 0.1$$

$$D = \sqrt{250} \times \sqrt{10^3} = \sqrt{25 \times 10 \times 10^3} = \sqrt{25 \times 10^4} = 5 \times 100 = 500$$

$$E = \frac{\sqrt{72}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{36 \times 2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{36} \times \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{36} = 6$$

$$F = \frac{\sqrt{125}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{25 \times 5}}{\sqrt{5}} = 5 \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 5$$

$$G = \sqrt{\frac{7}{8}} \times \sqrt{56} = \sqrt{\frac{7}{8} \times 8 \times 7} = \sqrt{7 \times 7} = 7$$

$$H = \frac{\sqrt{63}}{\sqrt{8}} \times \sqrt{\frac{2}{7}} = \sqrt{\frac{9 \times 7}{4 \times 2} \times \frac{2}{7}} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{4}} = \frac{3}{2}$$

$$I = (\sqrt{7})^2 = 7$$

$$J = (\sqrt{7})^3 = (\sqrt{7})^2 \times \sqrt{7} = 7\sqrt{7}$$

$$K = (4\sqrt{2})^2 = 4^2 \times (\sqrt{2})^2 = 16 \times 2 = 32$$

$$L = \left(\frac{\sqrt{4}}{3}\right)^2 = \frac{(\sqrt{4})^2}{3^2} = \frac{4}{9}$$

$$M = \left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{16}{3}$$

$$N = \left(\sqrt{\frac{4}{3}}\right)^2 = \frac{4}{3}$$

$$O = \left(\frac{3\sqrt{6}}{4}\right)^2 = \frac{9 \times 6}{4} = \frac{27}{2}$$

$$P = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10$$

$$Q = \sqrt{36} + \sqrt{64} = \sqrt{6^2} + \sqrt{8^2} = 6 + 8 = 14$$

$$R = \sqrt{169} - \sqrt{144} = \sqrt{13^2} - \sqrt{12^2} = 13 - 12 = 1$$

$$S = \sqrt{169 - 144} = \sqrt{25} = 5$$

Exercice 2 :

Ecrire les nombres sous la forme $a\sqrt{b}$ avec a et b deux entiers et b le plus petit possible.

$$T = \sqrt{28}$$

$$U = \sqrt{72}$$

$$V = \sqrt{150}$$

$$W = 2\sqrt{50}$$

$$X = 6\sqrt{45}$$

$$Y = \sqrt{\frac{80}{13}} \times \sqrt{\frac{39}{4}}$$

Solution :

$$T = \sqrt{28} = \sqrt{4 \times 7} = 2\sqrt{7}$$

$$U = \sqrt{72} = \sqrt{2 \times 4 \times 9} = 3 \times 2 \times \sqrt{2} = 6\sqrt{2}$$

$$V = \sqrt{150} = \sqrt{6 \times 25} = 5\sqrt{6}$$

$$W = 2\sqrt{50} = 2\sqrt{25 \times 2} = 2 \times 5 \times \sqrt{2} = 10\sqrt{2}$$

$$X = 6\sqrt{45} = 6\sqrt{9 \times 5} = 6 \times 3 \times \sqrt{5} = 18\sqrt{5}$$

$$Y = \sqrt{\frac{80}{13}} \times \sqrt{\frac{39}{4}} = \sqrt{\frac{4 \times 20 \times 3 \times 13}{13 \times 4}} = \sqrt{4 \times 5 \times 3} = 2\sqrt{15}$$

Exercice 3 :

Développer si nécessaire et réduire

$$A = -5\sqrt{3} + 2\sqrt{3}$$

$$B = \sqrt{2} + 6\sqrt{2} - 7\sqrt{2}$$

$$C = 5 - 4\sqrt{3} + 2\sqrt{3} - 8$$

$$D = 3\sqrt{45} + 2\sqrt{20} - 4\sqrt{80}$$

$$E = \sqrt{18} \times \sqrt{8} \times \sqrt{50}$$

$$F = \sqrt{3} (\sqrt{3} - 2)$$

$$G = \sqrt{15} (5 - 3\sqrt{15})$$

$$H = (\sqrt{5} - 3) (4 + \sqrt{5})$$

$$I = \sqrt{2} + \sqrt{8} + \sqrt{18}$$

$$J = 13\sqrt{2} + 4\sqrt{50} - \sqrt{162}$$

$$K = \sqrt{20} - \sqrt{45} + \sqrt{5}$$

$$L = (\sqrt{3} + \sqrt{5})^2$$

$$M = (\sqrt{3} - \sqrt{5})^2$$

$$N = (\sqrt{3} - \sqrt{5}) (\sqrt{3} + \sqrt{5})$$

$$O = (3\sqrt{5} - 2\sqrt{7})^2$$

$$P = 8\sqrt{3} (12 - 10\sqrt{7})$$

$$Q = (9\sqrt{6} - 4) (8 + 7\sqrt{2})$$

Solution :

On a vu dans l'exercice 1 qu'on ne pouvait pas additionner les racines de nombres différents. On peut par contre mettre en facteur les racines d'un même nombre, ce qu'on peut écrire $b\sqrt{a} + c\sqrt{a} = (b + c)\sqrt{a}$

$$A = -5\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = (-5 + 2)\sqrt{3} = -3\sqrt{3}$$

$$B = \sqrt{2} + 6\sqrt{2} - 7\sqrt{2} = (1 + 6 - 7)\sqrt{2} = 0\sqrt{2} = 0$$

$$C = 5 - 4\sqrt{3} + 2\sqrt{3} - 8 = -3 + (-4 + 2)\sqrt{3} = -3 - 2\sqrt{3}$$

Remarque : on pourrait être tenté de mettre $\sqrt{3}$ en facteur avec la présence du 3, mais ça n'est pas une bonne idée car cela ferait réapparaître une racine dans la parenthèse ! On aurait $-\sqrt{3}(\sqrt{3} + 2)$. On préfère toujours regrouper les racines et les entiers entre eux.

$$D = 3\sqrt{45} + 2\sqrt{20} - 4\sqrt{80} = 3\sqrt{9 \times 5} + 2\sqrt{4 \times 5} - 4\sqrt{16 \times 5} = 9\sqrt{5} + 4\sqrt{5} - 16\sqrt{5} = -3\sqrt{5}$$

$$E = \sqrt{18} \times \sqrt{8} \times \sqrt{50} = \sqrt{9 \times 2} \times \sqrt{4 \times 2} \times \sqrt{25 \times 2} = 3\sqrt{2} \times 2\sqrt{2} \times 5\sqrt{2} \\ = 3 \times 2 \times 5 \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} = 30 \times 2 \times \sqrt{2} = 60\sqrt{2}$$

$$F = \sqrt{3}(\sqrt{3} - 2) = (\sqrt{3})^2 - 2\sqrt{3} = 3 - 2\sqrt{3}$$

$$G = \sqrt{15}(5 - 3\sqrt{15}) = 5\sqrt{15} - 3(\sqrt{15})^2 = 5\sqrt{15} - 3 \times 15 = 5\sqrt{15} - 45$$

$$H = (\sqrt{5} - 3)(4 + \sqrt{5}) = 4\sqrt{5} + (\sqrt{5})^2 - 12 - 3\sqrt{5} = (4 - 3)\sqrt{5} + 5 - 12 = \sqrt{5} - 7$$

$$I = \sqrt{2} + \sqrt{8} + \sqrt{18} = \sqrt{2} + \sqrt{4 \times 2} + \sqrt{9 \times 2} = \sqrt{2} + 2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$$

$$J = 13\sqrt{2} + 4\sqrt{50} - \sqrt{162} = 13\sqrt{2} + 4\sqrt{25 \times 2} - \sqrt{81 \times 2} = 13\sqrt{2} + 20\sqrt{2} - 9\sqrt{2} = 24\sqrt{2}$$

$$K = \sqrt{20} - \sqrt{45} + \sqrt{5} = \sqrt{4 \times 5} - \sqrt{9 \times 5} + \sqrt{5} = 2\sqrt{5} - 3\sqrt{5} + \sqrt{5} = 0\sqrt{5} = 0$$

$$L = (\sqrt{3} + \sqrt{5})^2 = (\sqrt{3})^2 + (\sqrt{5})^2 + 2\sqrt{3}\sqrt{5} = 3 + 5 + 2\sqrt{3 \times 5} = 8 + 2\sqrt{15}$$

$$M = (\sqrt{3} - \sqrt{5})^2 = (\sqrt{3})^2 + (\sqrt{5})^2 - 2\sqrt{3}\sqrt{5} = 3 + 5 - 2\sqrt{3 \times 5} = 8 - 2\sqrt{15}$$

$$N = (\sqrt{3} - \sqrt{5})(\sqrt{3} + \sqrt{5}) = (\sqrt{3})^2 - (\sqrt{5})^2 = 3 - 5 = -2$$

$$O = (3\sqrt{5} - 2\sqrt{7})^2 = (3\sqrt{5})^2 + (2\sqrt{7})^2 - 12\sqrt{5}\sqrt{7} = 9 \times 5 + 4 \times 7 - 12\sqrt{35} = 73 - 12\sqrt{35}$$

$$P = 8\sqrt{3}(12 - 10\sqrt{7}) = 96\sqrt{3} - 80\sqrt{3}\sqrt{7} = 16\sqrt{3}(6 - 5\sqrt{7})$$

$$Q = (9\sqrt{6} - 4)(8 + 7\sqrt{2}) = 72\sqrt{6} + 63\sqrt{6}\sqrt{2} - 32 - 28\sqrt{2} = \sqrt{2}(72\sqrt{3} + 63\sqrt{6} - 28) - 32$$

Exercice 4 :

Supprimer les radicaux au dénominateur et simplifier.

$$R = \frac{27}{\sqrt{3}}$$

$$S = \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{8}}$$

$$T = \frac{2}{\sqrt{2}} - \sqrt{2}$$

$$U = \frac{\sqrt{3}}{1 - \sqrt{6}}$$

$$V = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} - \sqrt{7}} - \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3} + \sqrt{7}}$$

$$W = \frac{5\sqrt{3}}{2\sqrt{2} - 1}$$

$$X = \frac{5\sqrt{7} - 2}{3\sqrt{7}}$$

$$Y = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} - 1}$$

Solution :

$$R = \frac{27}{\sqrt{3}} = \frac{27\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sqrt{3}} = \frac{27\sqrt{3}}{3} = 9\sqrt{3}$$

$$S = \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{8}}{3\sqrt{8}\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{16}}{3 \times 8} = \frac{4}{24} = \frac{1}{6}$$

$$T = \frac{2}{\sqrt{2}} - \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{2}}{\sqrt{2}} - \sqrt{2} = \sqrt{2} - \sqrt{2} = 0$$

$$U = \frac{\sqrt{3}}{1 - \sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3}(1 + \sqrt{6})}{(1 - \sqrt{6})(1 + \sqrt{6})} = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{3}\sqrt{6}}{1 - 6} = -\frac{\sqrt{3} + 3\sqrt{2}}{5}$$

$$V = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} - \sqrt{7}} - \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3} + \sqrt{7}} = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3} + \sqrt{7})}{(\sqrt{3} - \sqrt{7})(\sqrt{3} + \sqrt{7})} - \frac{\sqrt{7}(\sqrt{3} - \sqrt{7})}{(\sqrt{3} + \sqrt{7})(\sqrt{3} - \sqrt{7})}$$

$$= \frac{3 + \sqrt{3}\sqrt{7}}{3 - 7} - \frac{\sqrt{3}\sqrt{7} - 7}{3 - 7} = -\frac{10}{4} = -\frac{5}{2}$$

$$W = \frac{5\sqrt{3}}{2\sqrt{2} - 1} = \frac{5\sqrt{3}(2\sqrt{2} + 1)}{(2\sqrt{2} - 1)(2\sqrt{2} + 1)} = \frac{10\sqrt{6} + 5\sqrt{3}}{8 - 1} = \frac{1}{7}(10\sqrt{6} + 5\sqrt{3})$$

$$X = \frac{5\sqrt{7} - 2}{3\sqrt{7}} = \frac{(5\sqrt{7} - 2)\sqrt{7}}{3(\sqrt{7})^2} = \frac{5 \times 7 - 2\sqrt{7}}{3 \times 7} = \frac{5}{3} - \frac{2}{21}\sqrt{7}$$

$$Y = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} - 1} = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3} + 1)}{(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1)} = \frac{3 + \sqrt{3}}{3 - 1} = \frac{3 + \sqrt{3}}{2}$$