Exercice 1 :

Factoriser les expressions suivantes :

$A = 7a^3b + 14a^2b$
$B = 5a^2 + 25a + 5a$
$C = (3x-2)\left(5x-1\right) - \left(x-5\right)\left(5x-1\right)$
$D = (7x+1)^2 - (7x+1)(3x-2)$
$E = \left(3x+5\right)(2x+7) - \left(6x+10\right)(x+13)$
$F = (x-1)^2 - 16$
$G = (4x-4) - \left(5x-13\right)(x-1) + x^2 - 1$
$H = x^2 - 4x + 4 + \left(1-5x\right)(2-x) + (x-2)$
$I = 3x^2 - 5x + 18 + (3x+2)\left(5x-9\right)$

Solution :

$A = 7a^3b + 14a^2b = 7a^2b\,(a+2)$

Le point d'attention pour cette première question est de ne pas s'arrêter au « b » qui saute aux yeux comme facteur commun. Il ne faut pas hésiter à ajouter une étape pour s'assurer de son résultat ou justement trouver des facteurs communs qu'on aurait manqué au premier abord :

$A = 7 \times a \times a \times a \times b + 7 \times 2 \times a \times a \times b$

$B = 5a^2 + 25a + 5a = 5a\left(a+5+1\right) = 5a\left(a+6\right)$

On retrouve le même point d'attention que dans la première question, donc on pense au « $5a$ ». Attention par contre cette fois à ne pas oublier le « 1 » dans le dernier facteur, on garde en tête : $5a = 5a \times 1$

$C = (3x-2)\left(5x-1\right) - \left(x-5\right)\left(5x-1\right) = \left(5x-1\right)\Big(3x-2-\left(x-5\right)\Big)$
$= \left(5x-1\right)\left(3x-2-x+5\right) = \left(5x-1\right)(2x+3)$

J'ai ajouté une étape intermédiaire « optionnelle » pour mettre en avant le fait qu'il faut bien faire attention au « $-$ » devant le deuxième membre.

$D = (7x+1)^2 - (7x+1)(3x-2) = (7x+1)(7x+1-3x+2) = (7x+1)(4x+3)$

Là encore, ne pas hésiter à écrire $(7x+1)^2 = (7x+1)(7x+1)$ pour mieux voir les 2 facteurs ! On retrouve le « $-$ » devant le second membre.

$E = \left(3x+5\right)(2x+7) - \left(6x+10\right)(x+13) = \left(3x+5\right)(2x+7) - 2\left(3x+5\right)(x+13)$
$= \left(3x+5\right)\left(2x+7-2(x+13)\right) = \left(3x+5\right)\left(2x+7-2x-26\right) = -19\left(3x+5\right)$

Si on ne voit pas immédiatement de facteur commun, il faut faire en sorte de le faire apparaître !

$F = (x-1)^2 - 16 = (x-1+4)(x-1-4) = (x+3)\left(x-5\right)$

Il faut reconnaître une identité remarquable !

<u>Rappel :</u> je redonne ici les 3 identités remarquables à connaître absolument. Et à connaître dans les 2 sens !

$\left(a+b\right)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
$\left(a-b\right)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
$\left(a+b\right)\left(a-b\right) = a^2 - b^2$

$G = (4x-4) - \left(5x-13\right)(x-1) + x^2 - 1 = 4(x-1) - \left(5x-13\right)(x-1) + (x+1)(x-1)$
$= (x-1)\left(4-5x+13+x+1\right) = (x-1)(-4x+18) = 2(x-1)(9-2x)$

$H = x^2 - 4x + 4 + \left(1-5x\right)(2-x) + (x-2) = (x-2)^2 - (x-2)\left(1-5x\right) + (x-2)$
$= (x-2)\left(x-2+5x-1+1\right) = (x-2)\left(6x-2\right) = 2(x-2)(3x-1)$

Dans les 2 expressions précédentes, on identifie une identité remarquable qui permet de trouver le facteur commun !

$I = 3x^2 - 5x + 18 + (3x + 2)\left(5x - 9\right) = 3x^2 - 5x + 18 + 15x^2 - 27x + 10x - 18$
$= 18x^2 - 22x = 2x\,(9x - 11)$
Dernier cas de figure, on ne trouve pas de facteur commun ! Il faut alors développer pour finir par trouver une factorisation de l'expression développée. Pour un exercice niveau fin de collège/début de lycée, il y a forcément une solution « simple ».

Exercice 2 :

Écrire y en fonction de x

1. $3x + 4y = 1$
2. $xy = 5$
3. $p = 2g\left(x - y\right)$

Solution :

1. $3x + 4y = 1 \Leftrightarrow 4y = 1 - 3x \Leftrightarrow y = -\dfrac{3}{4}x + \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow y = \dfrac{1}{4}(-3x + 1)$

J'ai mis 2 écritures différentes, qui sont tout aussi « justes » l'une que l'autre, à choisir en fonction de ses préférences : on diminue le nombre de termes ou on diminue le nombre de fractions !

2. $xy = 5 \Leftrightarrow y = \dfrac{5}{x}$

Rien à dire de plus ! Et si, évidemment, sinon ça serait trop simple ! Il faut à minima préciser qu'on considère $x \neq 0$ pour légitimer la division.
On peut même préciser que l'égalité de l'énoncé $xy = 5$ implique forcément $x \neq 0$ et $y \neq 0$ (sinon $xy = 0$), ce qui permet de faire la division par x.

3. Considérons le cas où $p \neq 0$ et $q \neq 0$ (n'hésitez pas à rédiger les autres cas !)

$p = 2g\left(x - y\right) \Leftrightarrow x - y = \dfrac{p}{2g} \Leftrightarrow y = x - \dfrac{p}{2g}$

Exercice 3 :

Simplifier les expressions suivantes :

$A = \dfrac{1}{4 - \sqrt{7}}$

$B = \dfrac{1 + \sqrt{7}}{1 - \sqrt{7}}$

$C = \dfrac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$

$D = \dfrac{202320232023202320232023}{202320232023}$

$E = \sqrt{\dfrac{7 + 4\sqrt{3}}{7 - 4\sqrt{3}}} + \sqrt{\dfrac{7 - 4\sqrt{3}}{7 + 4\sqrt{3}}}$

$F = \dfrac{\left(2\sqrt{5} + \sqrt{7}\right)^2 - \left(2\sqrt{5} - \sqrt{7}\right)^2}{4\sqrt{35}}$

Solution :

<u>Remarque :</u> on n'est plus tout à fait dans le calcul littéral, mais on notera que les manipulations effectuées sont à peu près les mêmes.

$$A = \frac{1}{4-\sqrt{7}} = \frac{4+\sqrt{7}}{\left(4-\sqrt{7}\right)\left(4+\sqrt{7}\right)} = \frac{4+\sqrt{7}}{16-7} = \frac{4+\sqrt{7}}{9}$$

On attaque tout de suite avec un des réflexes les plus importants pour réarranger ou simplifier des expressions : l'utilisation de l'expression conjuguée, basée sur une identité remarquable. L'expression conjuguée de $a+b$ est $a-b$. On s'en sert fréquemment pour faire « disparaître » des racines carrées ou, plus tard, des quantités imaginaires.

$$B = \frac{1+\sqrt{7}}{1-\sqrt{7}} = \frac{\left(1+\sqrt{7}\right)\left(1+\sqrt{7}\right)}{\left(1-\sqrt{7}\right)\left(1+\sqrt{7}\right)} = \frac{1+7+2\sqrt{7}}{1-7} = \frac{8+2\sqrt{7}}{-6} = -\frac{4+\sqrt{7}}{3}$$

Même astuce et 2 identités remarquables, c'est Noël avant l'heure !

$$C = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)} = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n+1-n} = \sqrt{n+1}-\sqrt{n}$$

L'expression finale semble bien plus simple à manipuler ! Cette question est en fait la première étape d'un exercice qui demande de trouver la somme des $\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ quand n parcourt les entiers de 1 à l'année en cours par exemple (on peut prendre n'importe quelle borne supérieure, l'important est de trouver la réécriture !). On trouve alors une somme téléscopique, mais on dépasse le cadre de cette feuille d'exercices, je tâcherai de le mettre dans une autre !

$$D = \frac{202320232023202320232023}{202320232023} = \frac{202320232023000000000000+202320232023}{202320232023}$$
$$= \frac{202320232023\,(1000000000000+1)}{202320232023} = 1000000000001$$

Il faut penser à réécrire le numérateur pour pouvoir le factoriser. La technique est très simple, il faut réussir à passer outre l'aspect intimidant de l'expression initiale !

$$E = \sqrt{\frac{7+4\sqrt{3}}{7-4\sqrt{3}}} + \sqrt{\frac{7-4\sqrt{3}}{7+4\sqrt{3}}} = \sqrt{\frac{\left(7+4\sqrt{3}\right)^2}{\left(7-4\sqrt{3}\right)\left(7+4\sqrt{3}\right)}} + \sqrt{\frac{\left(7-4\sqrt{3}\right)^2}{\left(7-4\sqrt{3}\right)\left(7+4\sqrt{3}\right)}}$$
$$= \sqrt{\frac{\left(7+4\sqrt{3}\right)^2}{49-48}} + \sqrt{\frac{\left(7-4\sqrt{3}\right)^2}{49-48}} = 7+4\sqrt{3}+7-4\sqrt{3} = 14$$

$$F = \frac{\left(2\sqrt{5}+\sqrt{7}\right)^2-\left(2\sqrt{5}-\sqrt{7}\right)^2}{4\sqrt{35}} = \frac{\left(20+7+4\sqrt{35}\right)-\left(20+7-4\sqrt{35}\right)}{4\sqrt{35}} = \frac{2\times 4\sqrt{35}}{4\sqrt{35}} = 2$$

Des résultats assez inattendus pour ces 2 dernières expressions ! Pour la dernière, on a un mélange des 3 identités remarquables : il faut partir du bon côté, la factorisation ne permet pas d'arriver facilement au résultat.