# Exercice 248 :

*Le produit de Wallis (cet exercice est un complément des exemples donnés dans le poly, qu'il faut donc lire avant de le faire ! En complément, n'hésitez pas à aller voir le post concernant les intégrales de Wallis posté en début de blog, il reprend certains résultats exposés dans le poly.)*

On pose pour $n \in \mathbb{N}$, $W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^n(t)\,dt$

a) Montrer pour $n$ dans $\mathbb{N}$, $W_{n+1} \leqslant W_n$

b) Déduire de l'exemple 3 du poly (ie. $W_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2}W_n$) que $\dfrac{n+1}{n+2}W_n \leqslant W_{n+1}$

c) Déterminer la limite en $+\infty$ de $\dfrac{W_{n+1}}{W_n}$

d) Conclure que $\displaystyle\lim_{k\to+\infty}\left(\frac{2\times4\times6\times\ldots\times2k}{3\times5\times7\times\ldots\times(2k+1)}\right)^2\times\frac{1}{2k+1} = \frac{\pi}{2}$

Puis que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{4k^2}\right) = \frac{2}{\pi}$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{(2k+1)^2}\right) = \frac{\pi}{4}$

## Solution :

a) $W_{n+1} - W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^{n-1}(t) - cos^n(t)\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^n(t)\left(cos(t) - 1\right)dt$

Comme $\forall t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $0 \leqslant cos(t) \leqslant 1$, $W_{n+1} - W_n \leqslant 0$.

$\boxed{\text{Ainsi pour } n \in \mathbb{N},\ W_{n+1} \leqslant W_n}$

b) La question précédente nous indique $W_{n+2} \leqslant W_{n+1}$.

Et avec la relation de récurrence donnée : $\boxed{\dfrac{n+1}{n+2}W_n \leqslant W_{n+1}}$

c) Des 2 questions précédentes, on encadre : $\dfrac{n+1}{n+2} \leqslant \dfrac{W_{n+1}}{W_n} \leqslant 1$.

$\boxed{\text{Et donc } \displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{W_{n+1}}{W_n} = 1}$

d) Pour cette question également, il faut utiliser les résultats donnés dans le poly, qui nous donne :

$$\frac{W_{2k+1}}{W_{2k}} = \left(\frac{2k\times(2k-2)\times\ldots\times4\times2}{(2k+1)\times(2k-1)\times\ldots\times3}\right)\times\frac{2}{\pi}\left(\frac{2k\times(2k-2)\times\ldots\times4\times2}{(2k-1)\times(2k-3)\times\ldots\times3}\right)$$

Ce qui donne $\displaystyle\left(\frac{2\times4\times6\times\ldots\times2k}{3\times5\times7\times\ldots\times(2k-1)}\right)^2\times\frac{1}{2k+1} = \frac{\pi}{2}\times\frac{W_{2k+1}}{W_{2k}}$

$\boxed{\text{Et finalement } \displaystyle\lim_{k\to+\infty}\left(\frac{2\times4\times6\times\ldots\times2k}{3\times5\times7\times\ldots\times(2k-1)}\right)^2\times\frac{1}{2k+1} = \frac{\pi}{2}}$

Remarquons que $1-\frac{1}{4k^2}=\frac{4k^2-1}{4k^2}=\frac{(2k+1)(2k-1)}{4k^2}$ ce qui nous permet de reconnaître l'inverse du quotient présent dans la question précédente :

D'où : $\lim\limits_{n\to+\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{4k^2}\right)=\frac{2}{\pi}$

Observons cette fois : $1-\frac{1}{(2k+1)^2}=\frac{(2k+1)^2-1}{(2k+1)^2}=\frac{2k(2k+2)}{(2k+1)^2}$

Cette fois, le produit contient $\frac{2k+2}{2k+1}$ en « trop », mais il « manque » un $2$ au début du produit par rapport au produit précédent.

Ce qui donne $\lim\limits_{n\to+\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{(2k+1)^2}\right)=\frac{\pi}{4}$

# Exercice 249 :

*Comportement asymptotique de* $\binom{2n}{n}$

Déduire de l'exercice précédent la relation $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n}\frac{\binom{2n}{n}}{4^n}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}$

## Solution :

Rappel : $\binom{2n}{n}=\frac{(2n)!}{(n!)^2}$

En reprenant les formules données par le poly :

$$W_{2n}=\frac{\pi}{2}\times\frac{(2n-1)(2n-3)\times\ldots\times 3}{2n\times(2n-2)\times\ldots\times 4\times 2}$$
$$=\frac{\pi}{2}\times\frac{(2n-1)(2n-3)\times\ldots\times 3}{2n\times(2n-2)\times\ldots\times 4\times 2}\times\frac{2n\times(2n-2)\times\ldots\times 4\times 2}{2n\times(2n-2)\times\ldots\times 4\times 2}$$

Ce qui donne : $W_{2n}=\frac{\pi}{2}\times\frac{(2n)!}{4^n(n!)^2}$

On trouve avec la même astuce : $W_{2n+1}=\frac{4^n(n!)^2}{(2n+1)!}$

Ceci permet d'écrire : $\frac{W_{2n+1}}{W_{2n}}=\frac{4^n(n!)^2}{(2n+1)!}\times\frac{4^n(n!)^2}{(2n)!}\times\frac{2}{\pi}=\left(\frac{4^n(n!)^2}{(2n)!}\right)^2\times\frac{2}{(2n+1)\pi}$

En prenant l'inverse : $\frac{2n+1}{2}\left(\frac{(2n)!}{4^n(n!)^2}\right)^2=\frac{1}{\pi}\times\frac{W_{2n}}{W_{2n+1}}$

Et en prenant la racine, puis passage à la limite : $\boxed{\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}\,\frac{\binom{2n}{n}}{4^n} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}}$