Exercice 250 :
Je passe cet exercice, dont le but est de reprendre la démonstration présentée juste avant dans le poly. L'idée principale est même indiquée juste avant l'exercice !

Exercice 251 :
Irrationalité de e

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$

a) Pour $n \in \mathbb{N}$, justifier l'encadrement $0 < e - u_n < \dfrac{e}{(n+1)!}$

b) On raisonne par l'absurde et on suppose e rationnel. On peut donc écrire $e = \dfrac{p}{q},\ (p,q) \in \mathbb{N}^{*2}$

Vérifier que pour $n \geqslant q$, le réel $n!\left(e - u_n\right)$ est un entier appartenant à $\left]0, \dfrac{e}{n+1}\right[$ et aboutir à une contradiction.

Solution :
a) On utilise la formule proposée dans l'introduction du paragraphe et :

$\forall x \in \mathbb{R},\ e^x = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^n}{k!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t dt$ et donc $e = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} e^t dt$

Ainsi, $e - u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} e^t dt.$

Comme $\forall t \in [0,1],\ (1-t)^n \geqslant 0$ (et même strictement supérieur sauf en 0), on a immédiatement $0 < e - u_n$.

De plus, $\forall t \in [0,1],\ e^t \leqslant e$ (et même strictement inférieur sauf en 1),

$$\int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} e^t dt < \frac{e}{n!} \int_0^1 (1-t)^n\, dt = \frac{e}{n!} \left[-\frac{(1-t)^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{e}{(n+1)!}$$

$\boxed{\text{On conclut donc } \forall n \in \mathbb{N},\ 0 < e - u_n < \dfrac{e}{(n+1)!}}$

b) Comme proposé dans l'énoncé, on suppose $e = \dfrac{p}{q},\ (p,q) \in \mathbb{N}^{*2}$.

Soit $n \geqslant q$, considérons $n!\left(e - u_n\right)$:

$n!e = \dfrac{n!}{q} p \in \mathbb{N}$ et $n!u_n = n! \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \in \mathbb{N}$, donc $n!\left(e - u_n\right) \in \mathbb{N}$

Mais, d'après la question précédente, $0 < n!\left(e - u_n\right) < \dfrac{e}{n+1}$, mais on ne peut pas avoir $\forall n \in \mathbb{N},\ \dfrac{e}{n+1} \in \mathbb{N}$!

$\boxed{\text{Finalement, } e \text{ est irrationnel.}}$

Exercice 252 :
Formule de Taylor avec reste intégral

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ admettant des dérivées de tous ordres. Montrer que pour n dans $\mathbb{N}$, on a :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt$$

Solution :

Nous allons procéder par récurrence.
Pour $n = 0$:
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt = f(0) + \int_0^x f'(t)\,dt = f(0) + f(x) - f(0) = f(x)$$

Supposons la propriété vraie au rang n et étudions le rang $n+1$:
Utilisons une intégration par parties :
$$\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt = -\left[\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t)\right]_0^x + \int_0^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\,dt$$
$$= \frac{(x)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(0) + \int_0^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\,dt$$

En incluant cela dans la formule du rang n, on trouve :
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \frac{(x)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(0) + \int_0^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\,dt$$
$$= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\,dt$$

Ce qui confirme bien que $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\,dt$
Et ainsi on valide l'hérédité de la propriété.

Finalement, $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt$

<u>Remarque :</u> on voit bien ici toute la puissance du raisonnement par récurrence, qui permet avec des techniques simples de démontrer un résultat très puissant. Evidemment, cela présuppose de connaitre le résultat, ce qui n'est souvent pas trivial !

Exercice 253 :

Une suite qui converge vers $\ln(2)$

Soit n dans $\mathbb{N}$

a) Montrer que, pour $\forall t \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^k = \frac{1}{1+t} + \frac{(-1)^n t^{n+1}}{1+t}$

b) En déduire que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln(2) + (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t} dt$

c) Montrer que $0 \leqslant \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t} dt \leqslant \frac{1}{n+2}$

d) Conclure $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln(2)$

e) Plus généralement, montrer que, si $0 \leqslant x \leqslant 1$, alors $\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1} = \ln(1+x)$

Donner une estimation de la « vitesse de convergence », c'est à dire de l'erreur $\left| \ln(1+x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1} \right|$.

Solution :

a) On reconnait la somme des termes d'une suite géométrique et donc :

$$\forall t \in \mathbb{R} \backslash \{-1\}, \ \sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^k = \frac{1-(-t)^{n+1}}{1+t} = \frac{1+(-1)^n t^{n+1}}{1+t}$$

Ce qui se réécrit : $\forall t \in \mathbb{R} \backslash \{-1\}, \ \sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^k = \frac{1}{1+t} + \frac{(-1)^n t^{n+1}}{1+t}$

b) Sur une somme finie, on peut intégrer termes à termes, il n'y a pas de problème de convergence sur $[0,1]$

$$\int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^k \right) dt = \sum_{k=0}^{n} \int_0^1 (-1)^k t^k dt = \int_0^1 \frac{1}{1+t} dt + \int_0^1 \frac{(-1)^n t^{n+1}}{1+t} dt$$

D'où $\sum_{k=0}^{n} \left[(-1)^k \frac{t^{k+1}}{k+1} \right]_0^1 = \left[\ln(1+t) \right]_0^1 + (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t} dt$

Et finalement $\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln(2) + (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t} dt$

c) La fonction intégrée est positive sur $[0,1]$, donc on obtient immédiatement $0 \leqslant \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t} dt$

$\forall t \in [0,1], \ \frac{1}{1+t} \leqslant 1$ et donc $\frac{t^{n+1}}{1+t} \leqslant t^{n+1}$

Ceci entraîne $\int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t} dt \leqslant \int_0^1 t^{n+1} dt = \left[\frac{t^{n+2}}{n+2} \right]_0^1 = \frac{1}{n+2}$.

Ce qui permet de conclure $0 \leqslant \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t} dt \leqslant \frac{1}{n+2}$

d) De la question précédente, par le théorème des gendarmes, on tire $\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t} dt = 0$

Et donc $\lim_{n \to +\infty} (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t} dt = 0$

Ainsi, $\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln(2)$

e) On peut reproduire le raisonnement précédent en intégrant sur $[0,x]$ plutôt que $[0,1]$, tant que $0 \leqslant x \leqslant 1$. Si $x > 1$, on ne peut plus majorer l'intégrale « résiduelle ».

$$\boxed{\text{Finalement si } 0 \leqslant x \leqslant 1,\ \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1} = \ln(1+x)}$$

La convergence de $\left|\ln(1+x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1}\right|$ est en $\frac{1}{n}$, donc très lente.

Exercice 254 :

Série de Grégory-Leibniz pour π

a) Montrer que $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[,\ \int_0^{\tan(x)} \frac{dt}{1+t^2} = x$

En particulier, $\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}$

b) Pour n dans $\mathbb{N}$, établir $\frac{\pi}{4} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} dt$

c) Conclure $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$

Solution :

a) Effectuons un changement de variable en posant $u = \arctan(t)$ et d'où $du = \frac{dt}{1+t^2}$

Ce qui donne $\int_0^{\tan(x)} \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^x du = x$

$$\boxed{\text{Et donc } \forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[,\ \int_0^{\tan(x)} \frac{dt}{1+t^2} = x}$$

<u>Remarque :</u> l'ensemble de départ proposé dans l'énoncé nous assure que notre changement de variable ne pose pas de souci particulier et ne nécessite pas de « $k\pi$ » résiduel.

<u>Rappel :</u> formule du changement de variable. Soit φ une fonction $\mathscr{C}^1$ sur $[a, b]$ et soit f une fonction continue sur $\varphi\left([a, b]\right)$. On a alors l'égalité $\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\,dt = \int_a^b f\circ\varphi(x)\,\varphi'(x)\,dx$

On sait de plus que $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$, ce qui confirme $\boxed{\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}}$

b) Notons que, comme somme des termes d'une suite géométrique, on a :

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^{2k} = \frac{1}{1+t^2} + (-1)^{n+1} \frac{t^{2(n+1)}}{1+t^2}$$

On peut intégrer terme à terme sur $[0,1]$, et ainsi :

$$\sum_{k=0}^{n} \int_0^1 (-1)^k t^{2k} dt = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt + \int_0^1 (-1)^{n+1} \frac{t^{2(n+1)}}{1+t^2} dt$$

Or, $\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{4}$ et $\int_0^1 (-1)^k t^{2k} dt = \frac{(-1)^k}{2k+1}$

Finalement, on obtient bien $\boxed{\frac{\pi}{4} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} dt}$

c) $\forall t \in [0,1]$, $\frac{t^{2n+2}}{1+t^2} \leqslant t^{2n+2}$ et donc $\int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} dt \leqslant \int_0^1 t^{2n+2} dt = \frac{1}{2n+3}$

Et de façon évidente, $\int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} dt \geqslant 0$, on a $\lim_{n \to +\infty} (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} dt = 0$

Ce qui conclut l'exercice et $\boxed{\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}}$