Exercice 244 :

Soit f une fonction continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}_+$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 f(t)\, t^n dt$.

Déterminer le signe de I_n, puis le sens de variation de la suite $(I_n)_{n \geqslant 0}$.

Solution :

Par définition de f, le contenu de l'intégrale est positif et donc $\boxed{\text{pour } n \in \mathbb{N},\ I_n \geqslant 0.}$

Pour déterminer le sens de variation de la suite, étudions $I_{n+1} - I_n$ pour $n \in \mathbb{N}$:

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 f(t)\, t^{n+1} dt - \int_0^1 f(t)\, t^n dt = \int_0^1 f(t)\left(t^{n+1} - t^n\right) dt = \int_0^1 f(t)\, t^n (t-1)\, dt$$

Or sur $[0,1]$, $t - 1 \leqslant 0$, donc $I_{n+1} - I_n \leqslant 0$.

$\boxed{(I_n)_{n \geqslant 0} \text{ est donc décroissante.}}$

Exercice 245 :

Soit f une fonction continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 f(t)\, t^n dt$.

On admet qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall t \in [0,1],\ \left|f(t)\right| \leqslant M$.

Majorer $\left|I_n\right|$ et montrer que $(I_n)_{n \geqslant 0}$ tend vers 0.

Solution :

Par inégalité triangulaire : $\left|I_n\right| = \left|\int_0^1 f(t)\, t^n dt\right| \leqslant \int_0^1 \left|f(t)\, t^n\right| dt$

Et par hypothèse sur f, on a $\int_0^1 \left|f(t)\, t^n\right| dt \leqslant \int_0^1 M t^n dt = \frac{M}{n+1}\left[t^{n+1}\right]_0^1 = \frac{M}{n+1}$

$\boxed{\text{Finalement, } \left|I_n\right| \leqslant \frac{M}{n+1}}$

On en déduit immédiatement que $\lim_{n \to +\infty} \left|I_n\right| = 0$

$\boxed{\text{Et donc } \lim_{n \to +\infty} I_n = 0}$

Exercice 246 :

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 \frac{e^{nt}}{1 + e^t} dt$.

a) Calculer I_1.

b) Déterminer le minimum de $\dfrac{1}{1+e^t}$ sur $[0,1]$. En déduire une minoration de I_n et en déduire la limite de $(I_n)_{n\geqslant 0}$.

c) Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer $I_{n+1} + I_n$.

d) Calculer I_0 et I_2.

e) Montrer que la suite $(I_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante.

f) Déduire des questions c) et e) la limite de la suite $\left(n e^{-n} I_n\right)_{n\geqslant 0}$

Solution :

a) $I_1 = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^t}{1+e^t}dt$. On reconnaît la forme $\dfrac{u'}{u}$ dont une primitive est $ln\,|u|$.

$$I_1 = \int_0^1 \frac{e^t}{1+e^t}dt = \left[ln\left(1+e^t\right)\right]_0^1 = ln\,(1+e) - ln\,(2)$$

$$\boxed{\text{Et donc } I_1 = ln\left(\frac{1+e}{2}\right)}$$

b) La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{1+e^t}$ est décroissante sur $\mathbb{R}$ et donc en particulier sur $[0,1]$

$$\boxed{\text{Donc } \forall t \in [0,1],\ \frac{1}{1+e^t} \geqslant \frac{1}{1+e}}$$

On peut donc minorer I_n en écrivant : $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{nt}}{1+e^t}dt \geqslant \frac{1}{1+e}\int_0^1 e^{nt}dt$

Or $\displaystyle\int_0^1 e^{nt}dt = \frac{1}{n}\left[e^{nt}\right]_0^1 = \frac{1}{n}\left(e^n - 1\right)$

$$\boxed{\text{Et donc } I_n \geqslant \frac{1}{n(1+e)}\left(e^n - 1\right)}$$

Par croissance comparée, on déduit $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = +\infty}$

c) $I_{n+1} + I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{(n+1)t}}{1+e^t}dt + \int_0^1 \frac{e^{nt}}{1+e^t}dt = \int_0^1 \frac{e^{(n+1)t}}{1+e^t} + \frac{e^{nt}}{1+e^t}dt = \int_0^1 e^{nt}\frac{1+e^t}{1+e^t}dt = \int_0^1 e^{nt}dt$

Et en reprenant le calcul de la question précédente pour $\boxed{n \neq 0,\ I_{n+1} + I_n = \dfrac{1}{n}\left(e^n - 1\right)}$

d) $I_0 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+e^t}dt$. Procédons par changement de variable $T = e^t$ et donc $dT = e^t dt$

$$I_0 = \int_1^e \frac{1}{T\,(1+T)}dT = \int_1^e \frac{1}{T} - \frac{1}{T+1}dT = \left[ln\,(T) - ln\,(T+1)\right]_1^e = ln\,(e) - ln\,(e+1) + ln\,(2)$$

$\boxed{\text{Donc } I_0 = ln\left(\frac{2e}{e+1}\right)}$

Pour calculer I_2, nous allons utiliser la question c) : $I_2 + I_1 = e - 1$

Utilisons maintenant le résultat de la question a) : $\boxed{I_2 = e - 1 - ln\left(\frac{1+e}{2}\right)}$

e) Étudions les variations de $\left(I_n\right)_{n\geqslant 0}$:

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 \frac{e^{(n+1)t} - e^{nt}}{1+e^t} dt = \int_0^1 e^{nt}\frac{e^t - 1}{1+e^t} dt$$

Comme $\forall t \in [0,1]$, $e^t - 1 \geqslant 0$, $I_{n+1} - I_n \geqslant 0$.

$\boxed{\text{Donc } \left(I_n\right)_{n\geqslant 0} \text{ est croissante.}}$

f) Pour alléger l'écriture, posons $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = ne^{-n}I_n$

D'après la question c) on a : $ne^{-n}I_{n+1} + u_n = \frac{n}{n+1}eu_{n+1} + u_n = 1 - e^{-n}$

De plus, on a vu dans la question b) que $I_n \geqslant \frac{e^n - 1}{n\,(1+e)}$, qui implique $u_n \geqslant \frac{1-e^{-n}}{1+e}$

En intégrant cela dans l'égalité précédente,

$$\frac{1-e^{-n}}{1+e} + \frac{n}{n+1}eu_{n+1} \leqslant \frac{n}{n+1}eu_{n+1} + u_n = 1 - e^{-n}.$$

D'où $u_{n+1} \leqslant \frac{n+1}{ne}\left(1 - e^{-n} - \frac{1-e^{-n}}{1+e}\right) = \frac{n+1}{ne} \times \frac{1 + e - e^{-n}(1+e) - 1 - e^{-n}}{1+e}$

Ce qui donne $u_{n+1} \leqslant \frac{n+1}{ne} \times \frac{e - e^{-n+1}}{1+e} = \frac{n+1}{n} \times \frac{1-e^{-n}}{1+e}$.

Finalement on encadre $\frac{1-e^{-n-1}}{1+e} \leqslant u_{n+1} \leqslant \frac{n+1}{n} \times \frac{1-e^{-n}}{1+e}$

$\boxed{\text{Ce qui permet de conclure } \lim_{n\to+\infty} ne^{-n}I_n = \frac{1}{1+e}}$

Exercice 247 :

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \int_1^e \left(ln\,(t)\right)^n dt$

a) Calculer I_1
b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, donner le signe de I_n
c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $I_{n+1} = e - (n+1)\,I_n$
d) Déduire des questions b) et c) la limite de $\left(I_n\right)_{n\geqslant 1}$
e) Montrer que la suite $\left(I_n\right)_{n\geqslant 1}$ est décroissante
f) Déterminer la limite de la suite $\left(nI_n\right)_{n\geqslant 1}$, en utilisant un encadrement judicieux.

Solution :

a) $I_1 = \int_1^e ln(t)\,dt = [tln(t) - t]_1^e = e - e - 0 + 1$

$\boxed{\text{Donc } I_1 = 1}$

b) $\forall t \in [1,e],\ (ln(t))^n \geqslant 0$

$\boxed{\text{Donc } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ I_n \geqslant 0}$

c) Nous allons procéder par une intégration par partie en considérant la fonction $t \mapsto 1$ comme fonction à intégrer. *(Remarque : le premier réflexe pourrait être de considérer ln^{n+1} en $ln \times ln^n$, mais cela ne mène à rien. N'hésitez pas à essayer… Je l'ai fait…)*

$$I_{n+1} = \int_1^e (ln(t))^{n+1}\,dt = \left[t\,(ln(t))^{n+1}\right]_1^e - (n+1)\int_1^e t \times \frac{1}{t}\,(ln(t))^n\,dt = e - (n+1)\int_1^e (ln(t))^n\,dt$$

$\boxed{\text{Donc } I_{n+1} = e - (n+1)\,I_n.}$

d) On sait que I_n et I_{n+1} sont positives, donc : $e - (n+1)\,I_n \geqslant 0$ ou $I_n \leqslant \dfrac{e}{n+1}$.

$\boxed{\text{On conclut de cela que } \lim_{n\to+\infty} I_n = 0}$

e) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $I_{n+1} - I_n = \int_1^e (ln(t))^{n+1} - (ln(t))^n\,dt = \int_1^e (ln(t))^n\,(ln(t) - 1)\,dt$

Or $\forall t \in [1,e],\ ln(t) - 1 \leqslant 0$, donc $I_{n+1} - I_n \leqslant 0$.

$\boxed{\text{Ce qui confirme que } (I_n)_{n\geqslant 1} \text{ est décroissante.}}$

f) Par la question d), on sait déjà que $n I_n \leqslant \dfrac{ne}{n+1}$.

D'autre part $I_{n+1} = e - (n+1)\,I_n \leqslant I_n$ ce qui donne $e - 2I_n \leqslant n I_n$.

Et finalement $e - 2I_n \leqslant n I_n \leqslant \dfrac{ne}{n+1}$.

$\boxed{\text{Cela permet de conclure } \lim_{n\to+\infty} n I_n = e}$