Exercice 145 :

Pour chacune des fonctions ci-après, déterminer l'ensemble de définition et calculer la dérivée

$a : x \mapsto x^3 \cos\left(5x+1\right);\ b : x \mapsto e^{\cos(x)};\ c : x \mapsto x \ln(x);\ d : x \mapsto \ln\left(e^x+1\right)$

$e : x \mapsto e^{x^3+2x^2+3x+4};\ f : x \mapsto e^{\sqrt{x^2+x+1}};\ g : x \mapsto \ln\left(e^x+\sin(x)\right);\ h : x \mapsto \dfrac{x}{x^2+1}$

$i : x \mapsto \dfrac{\cos(2x)}{x^2-2};\ j :\ x \mapsto \ln\left(\cos(2x)\right);\ k : x \mapsto \dfrac{x}{\sin(x)};\ l : x \mapsto \ln\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)$

$m : x \mapsto \ln\left(\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}\right); n : x \mapsto \ln\left(\ln(x)\right);\ o : x \mapsto \ln\left(\ln\left(\ln(x)\right)\right); p : x \mapsto \dfrac{\cos\left(x^2\right)}{\ln\left(\sqrt{1+e^x}\right)}$

Solution :

$\mathscr{D}_a = \mathbb{R}$

$\forall x \in \mathscr{D}_a,\ a'(x) = 3x^2\cos\left(5x+1\right) - 5x^3\sin\left(5x+1\right)$

$\mathscr{D}_b = \mathbb{R}$

$\forall x \in \mathscr{D}_b,\ b'(x) = -\sin(x)\, e^{\cos(x)}$

$\mathscr{D}_c = \mathbb{R}_+^*$

$\forall x \in \mathscr{D}_c,\ c'(x) = \ln(x) + \dfrac{x}{x} = \ln(x)+1$

$\mathscr{D}_d = \mathbb{R}$

$\forall x \in \mathscr{D}_d,\ d'(x) = \dfrac{e^x}{e^x+1}$

$\mathscr{D}_e = \mathbb{R}$

$\forall x \in \mathscr{D}_e,\ e'(x) = \left(3x^2+4x+3\right) e^{x^3+2x^2+3x+4}$

Remarque : l'utilisation de la lettre e pour la fonction est un peu malheureuse, j'espère que cela n'entraînera pas de confusion.

$\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$ (on vérifie facilement que $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2+x+1>0$)

$\forall x \in \mathscr{D}_f,\ f'(x) = \dfrac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}} e^{\sqrt{x^2+x+1}}$

Remarque : l'énoncé précise de ne pas préciser le domaine de définition.

$\forall x \in \mathscr{D}_g,\ g'(x) = \dfrac{e^x+\cos(x)}{e^x+\sin(x)}$

$\mathscr{D}_h = \mathbb{R}$

$\forall x \in \mathscr{D}_h,\ h'(x) = \dfrac{x^2+1-2x^2}{\left(x^2+1\right)^2} = \dfrac{1-x^2}{\left(x^2+1\right)^2}$

i est définie pour $x^2-2 \neq 0$ donc $\mathscr{D}_i = \mathbb{R}\backslash\left\{-\sqrt{2},\sqrt{2}\right\}$

$\forall x \in \mathscr{D}_i,\ i'(x) = \dfrac{-2\sin(2x)\left(x^2-2\right)-2x\cos(2x)}{\left(x^2-2\right)^2}$

j est définie pour $\cos(2x) > 0$, donc $2x \in \left]-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right[$, $k \in \mathbb{Z}$ et
$\mathscr{D}_j = \left\{\left]-\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi\right[, k \in \mathbb{Z}\right\}$
$\forall x \in \mathscr{D}_j,\ j'(x) = -\dfrac{2\sin(2x)}{\cos(2x)}$

k est définie si $sin(x) \neq 0$, donc si $x \neq 0\,[\pi]$ et ainsi $\mathscr{D}_k = \left\{\mathbb{R} \backslash k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$
$\forall x \in \mathscr{D}_k,\ k'(x) = \dfrac{\sin(x) + x\cos(x)}{\sin^2(x)}$

Pour que l soit définie, il faut déjà que $\sqrt{x^2-1} \geqslant 0$, et donc $x \in \left]-\infty, -1\right] \cup \left[1, +\infty\right[$
Il faut également vérifier que $x - \sqrt{x^2-1} > 0$, ce qui est vrai sur $\left]1, +\infty\right[$ et $\mathscr{D}_l = \left]1, +\infty\right[$

$$\forall x \in \mathscr{D}_l,\ l'(x) = \frac{1 - \frac{2x}{\sqrt{x^2-1}}}{x - \sqrt{x^2-1}} = \frac{\sqrt{x^2-1} - 2x}{x\sqrt{x^2-1} - x^2 - 1}$$

Pour que m soit définie, il faut déjà que $x \neq 1$. Il faut de plus $\dfrac{x+1}{x-1} > 0$ *(<u>Remarque :</u> si on décompose toutes les étapes, on peut d'abord vérifier avec $\geqslant$ pour s'assurer de la définition de la racine, mais l'inégalité devient stricte pour la définition du logarithme. On peut donc regrouper ces 2 étapes.)*
Or, pour que $\dfrac{x+1}{x-1} > 0$, il faut que les 2 quantités soient de même signe (et non nulles) ce qui implique $x \in \left]-\infty, -1\right[\cup \left]1, +\infty\right[$. Donc $\mathscr{D}_m = \left]-\infty, -1\right[\cup \left]1, +\infty\right[$

$$\forall x \in \mathscr{D}_m,\ m'(x) = \frac{\frac{\frac{x-1-x-1}{(x-1)^2}}{2\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}}}{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}} = -\frac{\frac{1}{(x-1)^2}}{\frac{x+1}{x-1}} = -\frac{1}{x^2-1}$$

Concernant la fonction n, elle est définie sur $\ln(x) > 0$ et donc $\mathscr{D}_n = \left]1, +\infty\right[$

$$\forall x \in \mathscr{D}_n =]1, +\infty[,\ n'(x) = \frac{\frac{1}{x}}{\ln(x)} = \frac{1}{x\ln(x)}$$

Pour o, on va s'appuyer du la fonction précédente n et pour qu'elle soit définie, il faut que $\ln\left(\ln(x)\right) > 0$, ce qui permet de conclure $\mathscr{D}_o =]e, +\infty[$.

$$\forall x \in \mathscr{D}_o,\ o'(x) = \frac{\frac{1}{x\ln(x)}}{\ln\left(\ln(x)\right)} = \frac{1}{x\ln(x)\ln\left(\ln(x)\right)}$$

Comme $\forall x \in \mathbb{R}, \sqrt{1+e^x} > 1$, $\mathscr{D}_p = \mathbb{R}$.

$$\forall x \in \mathscr{D}_o,\ p'(x) = \frac{-2x\sin\left(x^2\right)\ln\left(\sqrt{1+e^x}\right) - \cos\left(x^2\right)\frac{e^x}{2\sqrt{1+e^x}}}{\left(\ln\left(\sqrt{1+e^x}\right)\right)^2}$$

<u>Remarque :</u> je ne vois pas d'écriture « simple », je laisse comme ça.

Exercice 146 :

Soient f et g 2 fonctions 2 fois dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
On pose $h = f \circ g$. Pour x dans $\mathbb{R}$, donner une expression de $h''(x)$.

Solution :

Commençons par dériver h une première fois avec la formule classique :
$\forall x \in \mathbb{R},\ h'(x) = g'(x) \times f'\left(g(x)\right)$

Pour la 2ème étape, on va mixer la formule du produit et celle de la composée de dérivées :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ h''(x) = g''(x) \times f'\left(g(x)\right) + \left(g'(x)\right)^2 \times f''\left(g(x)\right)}$$

Exercice 147 :

Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ \cos^{(n)}(x) = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$

Solution :

Nous allons procéder par récurrence.

<u>Initialisation :</u>

Pour $n = 1$, $\forall x \in \mathbb{R},\ \cos'(x) = -\sin(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$,

Ce qui est bien la valeur attendue.

<u>Remarque :</u> on pouvait initialiser pour $n = 0$, qui donne $\cos(x) = \cos(x)$. L'énoncé nous indique $n \in \mathbb{N}$, ce qui implique de prendre en compte ce cas également, mais dans la mesure du possible, je préfère quand l'initialisation nous aide déjà à réfléchir sur les idées qu'on va utiliser pour l'hérédité.

<u>Hérédité :</u>

Considérons que la propriété est vraie pour un n donné et étudions le rang $n + 1$.

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \cos^{(n+1)}(x) = \left(\cos^{(n)}\right)'(x) = \cos'\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) = -\sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$$
$$= \cos\left(x + \frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(x + \frac{(n+1)\pi}{2}\right)$$

Ce qui nous assure l'hérédité de la propriété.

$$\boxed{\text{On conclut donc } \forall x \in \mathbb{R},\ \cos^{(n)}(x) = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)}$$