# Exercice 148 :

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $f$ une fonction $n$ fois dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $g$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = f(ax + b)$.

Pour $0 \leqslant k \leqslant n$ et $x \in \mathbb{R}$, donner une expression de $g^{(k)}(x)$

## Solution :

Étudions déjà les premières dérivées, dont l'existence nous est assurée par l'énoncé.

$\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = af'(ax + b)$

$\forall x \in \mathbb{R},\ g''(x) = a^2 f''(ax + b)$

Tâchons de prouver par récurrence la proposition que les premiers indices nous laisse supposer :

$\forall x \in \mathbb{R},\ g^{(k)}(x) = a^k f^{(k)}(ax + b)$

Cette proposition est initialisée par les premiers indices ci-dessus.

Supposons donc qu'elle est vraie au rang $k$ et étudions le rang $k + 1$ :

On trouve immédiatement : $\forall x \in \mathbb{R},\ g^{(k+1)}(x) = a \times a^k f^{(k+1)}(ax + b) = a^{k+1} f^{(k+1)}(ax + b)$.

$\boxed{\text{Et donc on conclut que pour } 0 \leqslant k \leqslant n,\ \forall x \in \mathbb{R},\ g^{(k+1)}(x) = a^{k+1} f^{(k+1)}(ax + b)}$

# Exercice 149 :

Soit $f$ la fonction de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f(x) = \dfrac{1}{x}$.

Donner une expression simple de $f^{(n)}(x)$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}^*$

## Solution :

Etudions d'abord les premières dérivées.

*<u>Rappel 1 :</u> pour cette exercice nous allons utiliser la formule de la dérivation des fonctions puissances la dérivée de $x^\alpha$ est $\alpha x^{\alpha-1}$*

*<u>Rappel 2 :</u> si besoin, n'hésitez pas à réécrire $\dfrac{1}{x^\alpha} = x^{-\alpha}$*

Normalement la dérivée de la fonction inverse est maîtrisée, on a $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$

Si besoin, on utilise la formule rappelée ci-dessus pour trouver $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f^{(2)}(x) = \dfrac{2}{x^3}$

Ecrivons également $f^{(3)}$ pour faire sortir la formule que nous allons montrer ensuite :

$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f^{(3)}(x) = -\dfrac{6}{x^4} = (-1)^3 \dfrac{3!}{x^{3+1}}$.

Avec cette écriture, montrons par récurrence que pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}^*$, $f^{(n)}(x) = (-1)^n \dfrac{n!}{x^{n+1}}$.

On peut vérifier que les formules données pour les premières dérivées peuvent bien s'écrire sous cette forme, ce qui sert d'initialisation.

Vérifions l'hérédité en considérant la propriété vraie au rang $n$ et considérons le rang $n + 1$ :

$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f^{(n+1)}(x) = (-1)^n n! \dfrac{-(n+1)}{x^{n+2}} = (-1)^{n+1} \dfrac{(n+1)!}{x^{n+2}}$.

Cela confirme bien l'hérédité de la propriété.

On conclut donc pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}^*$, $f^{(n)}(x) = (-1)^n \dfrac{n!}{x^{n+1}}$.

# Exercice 150 :

Soit $f$ la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = e^{-x^2}$.
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme $P_n$ à coefficients réels tel que :
$\forall x \in \mathbb{R},\ f^{(n)}(x) = P_n(x)\, e^{-x^2}$.

Expliciter $P_0$, $P_1$ et $P_2$

## Solution :

Nous allons plutôt commencer par la 2ème question, qui va nous servir pour se faire une idée de l'allure des dérivées successives.

$\forall x \in \mathbb{R},\ f^{(0)}(x) = f(x) = e^{-x^2}$ et donc on peut poser $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ P_0(x) = 1.}$

Si on dérive un première fois :
$\forall x \in \mathbb{R},\ f^{(1)}(x) = f'(x) = -2xe^{-x^2}$ et ainsi, $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ P_1(x) = -2x}$

Etudions maintenant la dérivée seconde :
$\forall x \in \mathbb{R},\ f^{(2)}(x) = -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2} = \left(4x^2 - 2\right) e^{-x^2}$, d'où $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ P_2(x) = 4x^2 - 2}$

Ces 3 résultats nous permettent bien d'initialiser la récurrence de la proposition pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme $P_n$ à coefficients réels tel que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f^{(n)}(x) = P_n(x)\, e^{-x^2}$.

Vérifions maintenant l'hérédité en calculant la dérivée $n+1$-ième :
$\forall x \in \mathbb{R},\ f^{(n+1)}(x) = P_n'(x)\, e^{-x^2} - 2xP_n(x)\, e^{-x^2} = \left(P_n'(x) - 2xP_n(x)\right) e^{-x^2}$

Et on peut donc poser $\forall x \in \mathbb{R},\ P_{n+1}(x) = P_n'(x) - 2xP_n(x)$ pour valider l'hérédité de la proposition.

Et on conclut que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme $P_n$ à coefficients réels tel que
$\forall x \in \mathbb{R},\ f^{(n)}(x) = P_n(x)\, e^{-x^2}$.