Exercice 154 :

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dérivable au point 0. Déterminer la limite $\dfrac{f\left(x^2\right)-f(0)}{x}$.

Solution :

<u>Rappel :</u> on reconnaît immédiatement un taux d'accroissement, surtout qu'on est dans le chapitre correspondant ! Il est très important de reconnaître $x = x - 0$ dans des problèmes plus généraux.

On sait que f est dérivable en 0, donc la composée $x \mapsto f\left(x^2\right)$ l'est également.
On sait de plus que cette composée est paire, on doit donc avoir l'égalité :

$$\lim_{x\to 0}\frac{f\left(x^2\right)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{f\left((-x)^2\right)-f(0)}{-x}$$

Et donc $\boxed{\lim_{x\to 0}\dfrac{f\left(x^2\right)-f(0)}{x} = 0}$

Exercice 155 :

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(0) = 0$ et $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f(x) = x^2\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$

a. Calculer $f'(x)$ pour $x \in \mathbb{R}^*$
b. En revenant à la définition, montrer que f est dérivable en 0 et calculer $f'(0)$
c. Montrer que f' n'est pas continue en 0

Solution :

a. f est bien dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme produit et composée de fonction qui le sont

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f'(x) = 2x\cos\left(\frac{1}{x}\right) + x^2 \times \frac{1}{x^2}\sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

Donc $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f'(x) = 2x\cos\left(\dfrac{1}{x}\right) + \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)}$

b. Calculons le taux d'accroissement dont $f'(0)$ serait la limite :

Pour $x \neq 0,\ \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \dfrac{x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{x} = x\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$

Comme la fonction $\cos$ est bornée, en particulier $-x \leqslant x\cos\left(\dfrac{1}{x}\right) \leqslant x$

on obtient $\lim_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} x\cos\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$

$\boxed{\text{Et donc } f \text{ est dérivable en } 0 \text{ et } f'(0) = 0}$

c. Étudions le comportement de f' au voisinage de 0, en reprenant l'expression

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f'(x) = 2x\cos\left(\frac{1}{x}\right) + \sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

Comme pour la question précédente, $2x \cos\left(\frac{1}{x}\right) \to 0$ quand $x \to 0$.

Par contre, $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ n'a pas de limite !

__Remarque :__ si besoin on peut le prouver avec $x_n = \frac{2}{n\pi}$ et donc $\frac{1}{x_n} = \frac{n\pi}{2}$, $\sin\left(\frac{1}{x_n}\right)$ vaut successivement 1 et -1. On peut également exhiber 2 suites qui auront des limites différentes.

Et donc f' n'est pas continue en 0.

Exercice 156 :

Soit a un nombre réel non nul, x_1 et x_2 2 nombres réels tels que $x_1 < x_2$, et f la fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto ax^2$.
Montrer que la tangente au graphe de f au point d'abscisse $\frac{x_1 + x_2}{2}$ est parallèle à la droite joignant les points du graphe de f aux points d'abscisses x_1 et x_2.

Solution :

On sait que f est dérivable et que sa dérivée f' est $x \in \mathbb{R} \mapsto 2ax$.

Le coefficient directeur de la tangente au graphe de f au point d'abscisse $\frac{x_1 + x_2}{2}$ est donc $a\left(x_1 + x_2\right)$.

D'un autre côté, le coefficient directeur de la droite joignant les points du graphe de f aux points d'abscisses x_1 et x_2 est donné par la formule : $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{ax_2^2 - ax_1^2}{x_2 - x_1} = a\frac{\left(x_2 + x_1\right)\left(x_2 - x_1\right)}{x_2 - x_1} = a\left(x_2 + x_1\right)$.

Ainsi, les 2 droites ont le même coefficient directeur et sont donc parallèles.

Exercice 157 :

a. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer l'équation de la droite D_n tangente au graphe de la fonction $\ln$ au point n.
b. Soit x_n l'abscisse du point d'intersection de D_n avec L'axe Ox. Déterminer x_n et la limite de la suite $\left(x_n\right)_{n \geqslant 1}$.

Solution :

a. On sait que la dérivée de la fonction $\ln$ est $x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{x}$ et donc : l'équation de D_n est

$$y = \ln(n) + \frac{1}{n}(x - n)$$

__Rappel :__ l'équation est de la tangente est rappelée dans le poly, je le remets tout de même si besoin pour une fonction f dérivable en a : $y = f(a) + f'(a)(x - a)$. Il faut la connaître par cœur, mais surtout savoir la retrouver rapidement si besoin : le coefficient directeur est $f'(a)$ par définition du nombre dérivé et la droite passe par $\left(a, f(a)\right)$.

Finalement, l'équation de D_n est $y = \frac{x}{n} + \ln(n) - 1$

b. x_n est le point de D_n pour lequel $y_n = 0$, ainsi : $\dfrac{x_n}{n} + \ln(n) - 1 = 0$

Donc $x_n = n\left(1 - \ln(n)\right)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = -\infty$

<u>Remarque :</u> je ne développe pas, il n'y a pas de forme indéterminée.