Exercice 151 :

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

a. On suppose que f est paire. Que dire de f' ?
b. Même question si f est impaire.
c. Même question si f est périodique de période $T \in \mathbb{R}_+^*$

Solution :

a. Par définition d'une fonction paire, on a $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = f(-x)$

Comme f est dérivable, on peut dériver cette égalité :
$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = -f'(-x)$

Et donc si f est paire, f' est impaire.

<u>Remarque :</u> on vérifie sur une fonction paire bien connue, par exemple $x \mapsto x^2$

b. Nous allons utiliser le même raisonnement pour une fonction impaire :
On a $\forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = -f(x)$

Et en dérivant : $\forall x \in \mathbb{R},\ -f'(-x) = -f'(x)$ ou $f'(-x) = f'(x)$

Et cette fois si f est impaire, f' est impaire.

<u>Remarque :</u> de la même façon, vérifie avec la fonction identité par exemple !

c. On a cette fois $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x+T) = f(x)$

On dérive à nouveau : $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x+T) = f'(x)$

On conclut que si f est périodique de période $T \in \mathbb{R}_+^*$, f' l'est également avec la même période.

Exercice 152 :

a. Déterminer 2 réels a et b tels que : $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{-1,0\},\ \dfrac{1}{x(x+1)} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x+1}$
b. Pour n dans $\mathbb{N}^*$, calculer la dérivée n-ième de $f : x \in \mathbb{R}\backslash\{-1,0\} \mapsto \dfrac{1}{x(x+1)}$

Solution :

a. Considérons $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1,0\}$.

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} = \frac{a(x+1)+bx}{x(x+1)} = \frac{(a+b)x+a}{x(x+1)}$$

Par identification, on obtient immédiatement $a = 1$ et $b = -1$

Et donc $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{-1,0\},\ \dfrac{1}{x(x+1)} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+1}$

b. Pour cette question, nous utilisons le résultat de l'exercice 149

On trouve $\forall x \in \mathbb{R},\ f^{(n)}(x) = (-1)^n \dfrac{n!}{x^{n+1}} - (-1)^n \dfrac{n!}{(x+1)^{n+1}}$

Ou finalement $\forall x \in \mathbb{R},\ f^{(n)}(x) = (-1)^n \dfrac{n!}{x^{n+1}} + (-1)^{n+1} \dfrac{n!}{(x+1)^{n+1}}$

Exercice 153 :

Si f est une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^*$, on appelle dérivée logarithmique de f la fonction $\dfrac{f'}{f}$

a. Soient u et v deux fonctions dérivables sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}^*$. Exprimer la dérivée logarithmique de uv en fonction de celles de u et v.
b. Généraliser la question précédente à un produit de n facteurs.
c. Soient n dans $\mathbb{N}^*$, $a_1 < \ldots < a_n$ des nombres réels et P la fonction polynôme définie par
$\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = \prod_{i=1}^{n} \left(x - a_i\right)$

Calculer la dérivée logarithmique de P sur les intervalles où elle est définie.

Solution :

a. Partons de la formule $(uv)' = u'v + uv'$

Comme les 2 fonctions sont à valeurs dans $\mathbb{R}^*$, on peut écrire la dérivée logarithmique de leur produit :

$$\frac{(uv)'}{uv} = \frac{u'v + uv'}{uv} = \frac{u'}{u} + \frac{v'}{v}$$

Et donc la dérivée logarithmique du produit de 2 fonctions et la somme des dérivées logarithmiques.

b. Posons $f = \prod_{i=1}^{n} f_i$ avec $n \geqslant 2$

On a alors $f' = \sum_{k=1}^{n} f'_k \prod_{i \neq k} f_i$

Remarque : si besoin on peut montrer ce résultat par récurrence à partir de la dérivée d'un produit.

Et donc $\dfrac{f'}{f} = \dfrac{\sum_{k=1}^{n} f'_k \prod_{i \neq k} f_i}{\prod_{i=1}^{n} f_i} = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{f'_k}{f_k}$

On peut donc généraliser le résultat précédent avec le produit de n fonctions $\dfrac{f'}{f} = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{f'_k}{f_k}$

c. Appliquons le résultat précédent à P

$\forall x \in \mathbb{R} \backslash \left\{a_1, \ldots, a_n\right\},\ \dfrac{P'(x)}{P(x)} = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{1}{x - a_i}$