Baccalauréat S groupe II bis(groupes II–III) juin 1996

Exercice 1 **4 points**

On dispose de deux urnes :

- une urne U_1 dans laquelle se trouvent trois boules blanches et deux boules noires ;
- une urne U_2 dans laquelle se trouvent deux boules blanches et trois boules noires.

Une épreuve consiste à tirer simultanément et au hasard deux boules de chaque urne : on obtient ainsi quatre boules, les tirages dans chaque urne étant équiprobables.

1. Montrer que la probabilité de l'évènement E :
   « parmi les quatre boules tirées, il y a exactement deux boules blanches » est égale à $0,46$.
2. On note X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le nombre de boules blanches obtenues.
   a. Déterminer la loi de probabilité de X.
   b. Le joueur doit verser $2,50$ F avant d'effectuer le tirage ; il reçoit à l'issue du tirage 1 F par boule blanche obtenue. Le jeu est-il équitable ?
3. Calculer la probabilité d'avoir tiré une et une seule boule blanche de l'urne U_1 sachant qu'on a tiré deux boules blanches.
4. On ne considère que l'urne U_1, de laquelle on tire toujours au hasard et simultanément deux boules. On nomme succès le tirage de deux boules blanches. On renouvelle dix fois la même épreuve (en remettant chaque fois les boules tirées dans l'urne). Déterminer la probabilité d'avoir au moins un succès sur les dix tirages.

Exercice 2 **5 points**
Enseignement obligatoire

Dans le plan complexe P, muni d'un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$, on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives :

$$z_{\text{A}} = -2\text{i}, \quad z_{\text{B}} = 4 - 2\text{i}, \quad z_{\text{C}} = 4 + 2\text{i}, \quad z_{\text{D}} = 1.$$

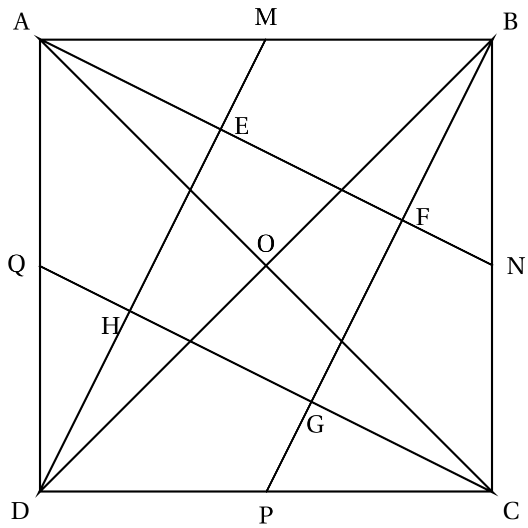
1. **a.** Placer les points A, B, C et D sur une figure, qui sera peu à peu complétée. On prendra pour unité graphique 2 cm.
   b. Préciser la nature du triangle ABC.
2. On désigne par F l'application qui, à tout point M de P, d'affixe z et distinct de A, associe le point M' d'affixe :
   $$z' = \frac{z - (4 + 2\text{i})}{z + 2\text{i}}.$$
   a. Déterminer les images de B et C par F.
   b. Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$ des points M d'affixe z tels que $\left|z'\right| = 1$. Construire $\mathcal{E}$.
3. **a.** Montrer que, pour tout nombre complexe z distinct de -2i, on a :
   $$\left(z' - 1\right)(z + 2\text{i}) = -4 - 4\text{i}.$$

b. Montrer que, pour tout point M, distinct de A, et dont l'image par F est notée M', on a :

$$\left\{\begin{array}{lcl} M' & \neq \mathrm{D} & \\ \mathrm{D}M' \cdot \mathrm{A}M & = & 4\sqrt{2} \\ \left(\overrightarrow{u}\,,\,\overrightarrow{\mathrm{D}M'}\right) + \left(\overrightarrow{u}\,,\,\overrightarrow{\mathrm{A}M}\right) & = & \dfrac{5\pi}{4} \quad (\mod 2\pi) \end{array}\right.$$

EXERCICE 2 **5 points**

Enseignement de spécialité



Dans le plan orienté, on considère la figure ci-dessus. ABCD est un carré de centre O et tel que $\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\,,\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right) = -\dfrac{\pi}{2}$.

Les points M, N, P et Q sont les milieux respectifs des segments [AB], [BC], [CD] et [DA].

Le but de l'exercice est de prouver que le quadrilatère EFGH est un carré, puis de comparer son aire à celle du carré ABCD. Dans chacune des questions, on énoncera avec précision les propriétés utilisées.

1. On se propose de démontrer que EFGH est un carré.

Soit r la rotation de centre O et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.

a. Déterminer l'image par r du point N, puis celle du segment [AN].

Déterminer l'image par r du point P, puis celle du segment [BP]. En déduire r(F) et la nature du triangle FOG.

b. Expliquer alors comment terminer la démonstration demandée.

2. Comparaison des aires des carrés ABCD et EFGH.

a. Justifier les égalités AE = EH = DH et AE = 2QH.

b. Soit K l'image de H par la symétrie s de centre Q.

Démontrer que AEHK est un carré et comparer son aire à celle du triangle AED.

c. En déduire le rapport entre les aires des carrés ABCD et EFGH.

3. Généralisation de la question 1.

On suppose maintenant que les points M$'$, N$'$, P$'$ et Q$'$ vérifient respectivement les égalités :

$$\overrightarrow{\mathrm{AM}'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \quad \overrightarrow{\mathrm{BN}'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{BC}}, \quad \overrightarrow{\mathrm{CP}'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{CD}} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\mathrm{DQ}'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{DA}}.$$

On construit le quadrilatère E′F′G′H′ en traçant les droites (AN′), (BP′), (CQ′) et (DM′).
Que suffit-il de changer à la démonstration du 1. pour démontrer que E′F′G′H′ est un carré ?

PROBLÈME **11 points**

Dans ce problème, on étudie successivement les fonctions f, g et h définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x\text{e}^{-x},\ g(x) = f(x) + [f(x)]^2 \quad \text{et}\, h(x) = \int_0^x g(t)\,\text{d}t.$$

Partie A - Étude de la fonction f

1. **a.** Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa fonction dérivée f'. Étudier le sens de variation de f.
   b. Déterminer la limite de f en $-\infty$ et sa limite en $+\infty$.
   c. Donner le tableau de variations de f.
   (On ne demande pas de construire la représentation graphique de f)
2. **a.** Montrer que l'équation $f(x) = -\dfrac{1}{2}$ n'admet aucune solution dans l'intervalle $[0~;~+\infty[$ et qu'elle admet une unique solution dans l'intervalle $]-\infty~;~0[$.
   b. On désigne par α cette solution. Montrer que :
   $$-0,36 < \alpha < -0,35.$$
   c. Montrer de même que l'équation $f(x) = -1$ n'admet aucune solution dans l'intervalle $[0~;~+\infty[$ et qu'elle admet une unique solution, notée β, dans l'intervalle $]-\infty~;~0[$, β vérifiant :
   $$-0,57 < \beta < -0,56.$$

Partie B - Étude de la fonction g

1. Justifier que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que l'on a :
   $$g'(x) = f'(x)[1 + 2f(x)].$$
   Étudier le sens de variation de g.
2. Déterminer la limite de g en $+\infty$ et sa limite en $-\infty$.
3. Donner le tableau de variations de g. On calculera la valeur exacte de $g(\alpha)$.
4. **a.** Établir que, pour tout réel x, on a :
   $$g(x) - x = x\text{e}^{-x}\left[1 + x\text{e}^{-x} - \text{e}^{x}\right].$$
   b. Montrer que, pour tout x réel, on a :
   $$1 + x\text{e}^{-x} \leqslant 1 + x \leqslant \text{e}^{x}.$$
   c. Préciser la position de la courbe représentative Γ de la fonction g par rapport à sa tangente T en O.
5. Tracer Γ (on prendra pour unité graphique 4 cm). Préciser les abscisses des points d'intersection de Γ avec l'axe des abscisses. Faire figurer sur le dessin la tangente T.

Partie C - Étude de la fonction *h*

1. Quelle est la fonction dérivée de h ? Étudier le sens de variation de h.

2. Soient $I(x) = \displaystyle\int_0^x t\text{e}^{-t}\,\text{d}t$ et $J(x) = \displaystyle\int_0^x t^2\text{e}^{-t}\,\text{d}t$.

a. À l'aide d'une intégration par parties, calculer $I(x)$.
Déterminer la limite de $I(x)$ en plus l'infini.

b. À l'aide de deux intégrations par parties, calculer $J(x)$.
Déterminer la limite de $J(x)$ en plus l'infini. Expliciter $h(x)$ et déterminer la limite de $h(x)$ en plus l'infini.