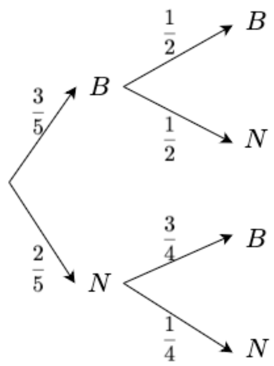
Bac S 1996 - Métropole gr II

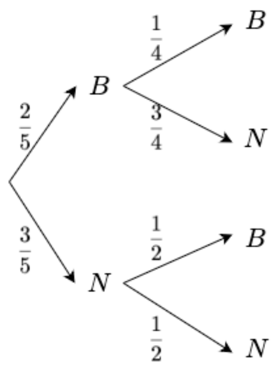
Exercice 1 :

1. On veut exactement 2 boules blanches. Il existe 3 possibilités pour y arriver :
   - 2 boules blanches dans l'urne U_1 et 0 dans U_2, notée $P\,(2{,}0)$
   - 2 boules blanches dans l'urne U_2 et 0 dans U_1, notée $P\,(0{,}2)$
   - 1 dans chaque, notée $P\,(1{,}1)$

Indiquons les arbres des 2 urnes :
urne U_1 :



urne U_2 :



Le tirages dans les 2 urnes sont indépendants, on trouve ainsi :

$$P\,(2{,}0) = \frac{3}{5} \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{9}{100}$$

$$P\,(0{,}2) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} \times \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{100}$$

$$P\,(1{,}1) = \left(\frac{3}{5} \times \frac{1}{2} + \frac{2}{5} \times \frac{3}{4}\right) \times \left(\frac{2}{5} \times \frac{3}{4} + \frac{3}{5} \times \frac{1}{2}\right) = \frac{12}{20} \times \frac{12}{20} = \frac{36}{100}$$

En additionnant les 3, on trouve bien que la probabilité de tirer exactement 2 boules blanches est 0.46

2.

a. La loi X peut prendre les valeurs $0,\ 1,\ 2,\ 3$ et 4

Traitons déjà les cas les plus simples $X = 0$ et $X = 4$. Par « symétrie » des urnes U_1 et U_2, ces 2 résultats ont la même probabilité.

On utilisera la notation « évidente » $P(n)$ pour la probabilité de $X = n$.

$X = 0$ correspond à toutes les boules tirées sont noires.

$$P(0) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{6}{200} = 0.03$$

De la même façon, on trouve $P(4) = 0.03$

Nous allons utiliser les calculs de la première question pour calculer $P(1)$:

En reprenant les notations de la première question, on a $P(1) = P(1{,}0) + P(0{,}1)$

$$P(1) = \frac{12}{20} \times \frac{3}{10} + \frac{2}{20} \times \frac{12}{20} = \frac{18}{100} + \frac{6}{100} = 0.24$$

De la même façon que $P(0) = P(4)$ $P(3) = P(1) = 0.24$.

$\boxed{\text{On a donc la loi } X : P(0) = P(4) = 0.03,\ P(3) = P(1) = 0.24,\ P(2) = 0.46}$

b. Calculons l'espérance de gain pour le jeu proposé, sachant qu'on gagne 1€ *(on va éviter de parler en Francs !)* par boule blanche tirée :

$$E = 0 \times P(0) + 1 \times P(1) + 2 \times P(2) + 3 \times P(3) + 4 \times P(4)$$

Ce qui donne :

$$E = 1 \times 0.24 + 2 \times 0.46 + 3 \times 0.24 + 4 \times 0.03 = 2.$$

$\boxed{\text{L'espérance de gain est de 2€ pour une mise de 2,5€. Le jeu n'est pas équitable.}}$

3. Pour cette question, nous allons utiliser la formule : $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$

$$P_{X=2}\left(1B \in U_1\right) = \frac{P(1{,}1)}{P(X=2)} = \frac{0.36}{0.46} = 0.78$$

$\boxed{\text{La probabilité de tirer une boule blanche dans } U_1 \text{ sachant qu'on a tiré 2 boules blanches est donc de } 78\ \%}$

4. Comme déjà vu, la probabilité de tirer 2 boules blanches est $P(2B) = \dfrac{3}{10}$

On va cette fois utiliser la formule $P\left(\overline{A}\right) = 1 - P(A)$

Sur les 10 tirages, avoir au moins 1 fois 2 boules blanches est l'évènement contraire de aucun des 10 tirages n'a obtenu 2 boules blanches.

On est donc en présence d'une loi de Bernouilli avec $P(2B) = \dfrac{3}{10}$ et $P\left(\overline{2B}\right) = \dfrac{7}{10}$

On a donc $P\left(10 \times \overline{2B}\right) = \left(\dfrac{7}{10}\right)^{10} \approx 0.03$

$\boxed{\text{Finalement, la probabilité de tirer au moins 1 fois 2 boules blanches est de } 0.97.}$

Exercice 2 - enseignement obligatoire :

1.

a. Le schéma sera inclus plus tard.

b. D'après la figure, on voit immédiatement que ABC est un triangle rectangle en B.
Compte-tenu de la disposition des points, la méthode la plus simple semble être le calcul du produit scalaire $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA}$.
Or $\overrightarrow{BC}\,(0{,}4)$ et $\overrightarrow{BA}\,(-4{,}0)$.

__Rappel :__ le produit scalaire de $\overrightarrow{u}\,(x,y)$ et $\overrightarrow{v}\,(x',y')$ est $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = xx' + yy'$.

On a donc $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA} = 0$

On confirme donc que ABC est un triangle rectangle en B.

2.

a. Nommons B' l'image de B.

$$z_{B'} = \frac{z_B - (4+2i)}{z_B + 2i} = \frac{4-2i-4-2i}{4-2i+2i} = -\frac{4i}{4} = -i$$

Sur le même principe, nommons C' l'image de C.

$$z_{C'} = \frac{z_C - (4+2i)}{z_C + 2i} = \frac{4+2i-(4+2i)}{4+2i+2i} = 0$$

Donc $C' = O$

Les 2 points sont placés sur la figure.

b. $$\left|z'\right| = 1 \Leftrightarrow \left|\frac{z-(4+2i)}{z+2i}\right| = 1 \Leftrightarrow \left|\frac{z-z_C}{z-z_A}\right| = 1$$

Ce qui signifie donc que $M \in \mathscr{E} \Leftrightarrow \left|\overrightarrow{CM}\right| = \left|\overrightarrow{AM}\right|$

Et donc $\mathscr{E}$ est la médiatrice de $[AC]$

3.

a. Si $z \neq -2i$, on a :

$$(z'-1)(z+2i) = \left(\frac{z-(4+2i)}{z+2i} - 1\right)(z+2i) = z - (4+2i) - z - 2i = -4-4i$$

Ce qui confirme que $\forall z \neq -2i,\ (z'-1)(z+2i) = -4-4i$

b. On considère $M \neq A$ et M' son image.
D'après la question précédente, si $M' = D$, on aurait $z' - 1 = 0$ et donc l'égalité précédente ne pourrait être vérifiée.

Donc $\forall M \neq A,\ M' \neq D$

$$DM' \times AM = \left|z'-1\right| \times \left|z+2i\right| = \left|(z'-1)(z+2i)\right| = \left|-4-4i\right| = \sqrt{16+16} = \sqrt{16\times 2}$$

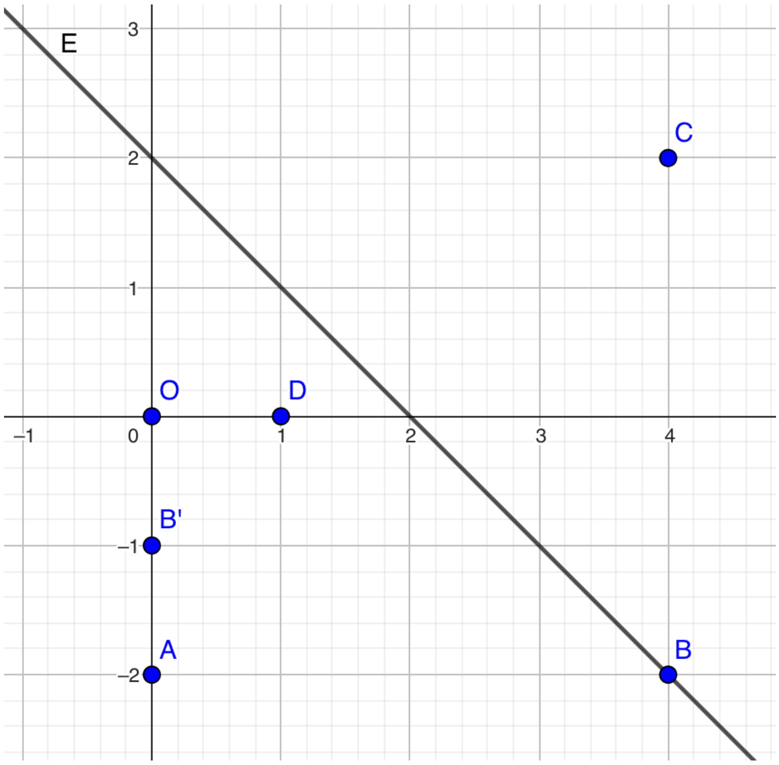
$$\boxed{\text{Et ainsi } DM' \times AM = 4\sqrt{2}}$$

$\left(\vec{u}, \overrightarrow{DM'}\right) + \left(\vec{u}, \overrightarrow{AM}\right) = arg\left((z'-1)(z+2i)\right) = arg\left(-4-4i\right)$

<u>Rappel :</u> l'argument du produit de 2 complexes est la somme des arguments de ces complexes. On le prouve rapidement en utilisant la forme exponentielle.

$$\boxed{\text{Et donc } \left(\vec{u}, \overrightarrow{DM'}\right) + \left(\vec{u}, \overrightarrow{AM}\right) = \frac{5\pi}{4}\ [2\pi]}$$

Figure :



Exercice 2 - spécialité :

1.
a. Je n'insiste pas sur les propriétés du carré, on a :

$$\boxed{\text{L'image de } N \text{ par } r \text{ est } P \text{ et celle de } [AN] \text{ est donc } [BP]}$$

De la même façon :

$$\boxed{\text{L'image de } P \text{ par } r \text{ est } Q \text{ et celle de } [BP] \text{ est donc } [CQ]}$$

Idem, je n'insiste pas sur la rédaction, mais en utilisant le fait que $(AN)//(QC)$ et $(DM)//(BP)$ et le théorème de Thales on trouve que $AE = BF = CG$.

On en déduit que G est l'image de F par r et FOG est rectangle en O.

b. En faisant « tourner » les mêmes observations, on conclut que $EFGH$ possède des côtés parallèles 2 à 2, et de même longueur et que ses diagonales sont orthogonales et se coupent en leurs milieu.

On conclut de cela que $EFGH$ est un carré.

<u>Remarque :</u> je n'ai pas pris la peine de rédiger en détails, mais je pense que toutes les propriétés utilisées sont assez évidentes en Terminale. N'hésitez pas à tout écrire si besoin, je pense que la seule étape un peu moins triviale est l'utilisation de Thales qui nécessite le nommage des points d'intersection entre les diagonales de $ABCD$ et les côtés de $EFGH$.

2.

a. On a déjà explicité $AE = DH$.

$DH = HE$ s'obtient assez directement, une nouvelle fois avec Thales dans ADE comme Q est le milieu de $[AD]$. On en tire également $AE = 2QH$.

Donc $AE = DH = EH$ et $AE = 2QH$.

b. Par construction, on a déjà $AE = EH = HK$ et 2 angles droits en E et H.

Ceci permet de conclure que $AEHK$ est un carré

<u>Remarque :</u> les éléments donnent que $AEHK$ est un trapèze rectangle, les 2 bases ayant la même longueur, c'est un rectangle et les 3 côtés connus étant de même longueur, c'est un carré !

L'aire de $AEHK$ est $AE \times HE$

L'aire de AED est $\dfrac{AE \times DE}{2} = AE \times HE$

Ainsi, $AEHK$ et AED ont la même aire.

c. On a $\mathscr{A}_{ABCD} = 4 \times \mathscr{A}_{ADE} + \mathscr{A}_{EFGH}$

Et avec la question précédente, $\mathscr{A}_{ABCD} = 5 \times \mathscr{A}_{EFGH}$

3. Le raisonnement va être le même, les « proportions » du théorème de Thales vont être modifiées, mais le principe n'est pas modifié !

Problème :

Partie A :

1.

a. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonction qui le sont.

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = e^{-x}(1-x)$$

Comme de plus $\forall x \in \mathbb{R},\ e^{-x} > 0, f'$ est du signe de $1-x$

Finalement, $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = e^{-x}(1-x)$ et f est croissante sur $]-\infty,1]$ puis décroissante sur $[1,+\infty[$

b. Commençons par la limite en $-\infty$, qui ne présente pas de forme indéterminée :

Quand $x \to -\infty$, $e^{-x} \to +\infty$

Et donc $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

En $+\infty$:
Quand $x \to +\infty$, $e^{-x} \to 0$ et par croissance comparée :

$\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$

c. On en déduit le tableau de variations de f

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0

2.
a. f étant en particulier continue, on peut utiliser la réciproque du théorème des valeurs intermédiaires (TVI).

On a de plus que $f(0) = 0$

On déduit donc que $f(x) = -\dfrac{1}{2}$ n'admet pas de solution sur $\mathbb{R}_+$ et une unique sur $\mathbb{R}_-$

b. Numériquement, on trouve $f\left(-0.36\right) \approx -0.516$ et $f\left(-0.35\right) \approx -0.497$

En application du TVI, on conclut bien que $-0.36 < \alpha < -0.35$.

c. Je n'insiste pas sur cette question qui est exactement la même que la précédente, on y répond avec la réciproque du TVI, le calcul numérique et le TVI !

On trouve donc $-0.57 < \beta < -0.56$

Partie B :

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = f(x) + \left[f(x)\right]^2$

g est bien dérivable, car la composée f^2 l'est comme f.

$\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = f'(x) + 2f'(x)f(x)$

Et donc $\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = f'(x)\left(1 + 2f(x)\right)$

Le tableau ci-dessous nous donne le signe de g'

x	$-\infty$		α		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$+$		$-$	
$1+2f(x)$		$-$		$+$		$+$	
$g'(x)$		$-$		$+$		$-$	

Ainsi, g est décroissante sur $]-\infty,\alpha]$, croissante sur $[\alpha,1]$ puis à nouveau décroissante sur $[1,+\infty[$

2. <u>En $-\infty$:</u>

Écrivons $g(x)=f(x)+[f(x)]^2 = xe^{-x}+x^2e^{-2x} = x^2e^{-2x}\left(1+\frac{e^x}{x}\right)$

Quand $x\to-\infty$, $x^2\to+\infty$, $e^{-2x}\to+\infty$ et $1+\frac{e^x}{x}\to 1$

Et donc $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=+\infty$

<u>En $+\infty$:</u>

$g(x)=xe^{-x}+x^2e^{-2x}$

Par croissance comparée, nous pouvons conclure directement :

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$

3. Le tableau de variation de g

x	$-\infty$		α		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$		$+$		$-$	
$g(x)$	$+\infty$	↘	$-\frac{1}{4}$	↗	$\frac{e+1}{e^2}$	↘	0

4.

a. $\forall x\in\mathbb{R},\ g(x)-x = xe^{-x}+x^2e^{-2x}-x = xe^{-x}\left(1+xe^{-x}-e^x\right)$

Ce qui confirme $\forall x\in\mathbb{R},\ g(x)-x = xe^{-x}\left(1+xe^{-x}-e^x\right)$

b. Étudions la fonction intermédiaire k définie par $\forall x\in\mathbb{R},\ k(x)=1+xe^{-x}-1-x = x\left(e^{-x}-1\right)$

x et $e^{-x}-1$ sont de signes opposés, sauf en 0 ou les 2 valent 0.

Donc, $\forall x\in\mathbb{R},\ 1+xe^{-x}\leqslant 1+x$

Regardons maintenant l définie par $\forall x\in\mathbb{R},\ l(x)=e^x-1-x$.

l est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ l'(x) = e^x - 1$.
l' est négative sur $\mathbb{R}_-$, puis positive sur $\mathbb{R}_+$ donc l est décroissante puis croissante et s'annule en 0.

Donc on confirme que $\forall x \in \mathbb{R},\ 1 + x \leqslant e^x$

$\boxed{\text{Et finalement } \forall x \in \mathbb{R},\ 1 + xe^{-x} \leqslant 1 + x \leqslant e^x}$

c. On a $g(0) = 0$ et $g'(0) = 1$, donc la tangente à Γ en O est donc $x \mapsto x$.

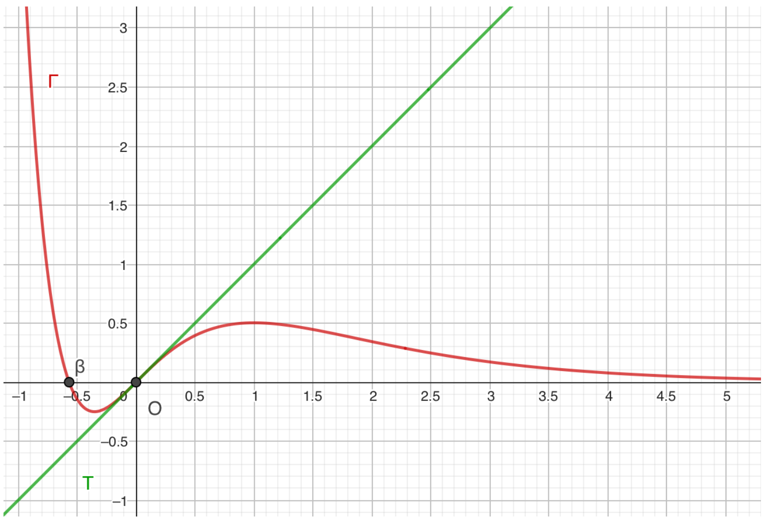
Ainsi, $g(x) - x$ va nous indiquer quelle est la position de Γ par rapport à sa tangente.
On a vu que $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) - x = xe^{-x}\left(1 + xe^{-x} - e^x\right)$ et la question précédente, nous permet de dire que $\forall x \in \mathbb{R},\ 1 + xe^{-x} - e^x \leqslant 0$, on conclut donc que $g(x) - x$ est du signe opposé de ce lui de $f(x)$.

$\boxed{\text{Donc } \Gamma \text{ est au-dessus de sa tangente en } O \text{ sur } \mathbb{R}_-\text{, puis en-dessous sur } \mathbb{R}_+.}$

5. Le tableau de variations de g (et le TVI) nous indique que la fonction possède 2 racines.

L'une est 0 comme nous l'avons vu précédemment.

Calculons $g(\beta) = f(\beta) + \left[f(\beta)\right]^2 = -1 + 1 = 0$



Partie C :

1. Par définition de l'intégrale, h est la primitive de g qui s'annule en 0.

$\boxed{\text{Et ainsi la dérivée de } h \text{ et } g.}$

Ceci permet de déduire tout de suite son sens de variations :

$\boxed{h \text{ est croissante sur } \left]-\infty, \beta\right]\text{, décroissante sur } \left[\beta, 0\right] \text{ puis à nouveau croissante sur } \left[0, +\infty\right[}$

2.
a. Effectuons, comme proposé, une intégration par parties :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ I(x) = \int_0^x te^{-t}dt = -\left[te^{-t}\right]_0^x + \int_0^x e^{-t}dt = -xe^{-x} - \left[e^{-t}\right]_0^x = -xe^{-x} - e^{-x} + 1$$

Et donc $\forall x \in \mathbb{R},\ I(x) = -xe^{-x} - e^{-x} + 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} I(x) = 1$

b. Considérons maintenant $J(x) = \displaystyle\int_0^x t^2e^{-2t}dt$

<u>Remarque :</u> il y a manifestement une faute de frappe dans l'énoncé.

$$\forall x \in \mathbb{R},\ J(x) = \int_0^x t^2e^{-2t}dt = -\frac{1}{2}\left[t^2e^{-2t}\right]_0^x + \int_0^x te^{-2t}dt = -\frac{x^2e^{-2x}}{2} - \frac{1}{2}\left[te^{-2t}\right]_0^x + \frac{1}{2}\int_0^x e^{-2t}dt$$

$$= -\frac{1}{2}\left(x^2e^{-2x} + xe^{-2x}\right) - \frac{1}{4}\left[e^{-2t}\right]_0^x = -\frac{1}{2}\left(x^2e^{-2x} + xe^{-2x}\right) - \frac{1}{4}\left(e^{-2x} - 1\right)$$

Et donc $\forall x \in \mathbb{R},\ J(x) = -\dfrac{1}{2}\left(e^{-2x}\left(x^2 + x - \dfrac{1}{2}\right) - \dfrac{1}{2}\right)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} J(x) = \dfrac{1}{4}$

<u>Remarque :</u> on utilise une nouvelle fois la domination de l'exponentielle sur la puissance par croissance comparée.

Finalement, en sommant les I et J, on trouve :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = -xe^{-x} - e^{-x} - \frac{1}{2}e^{-2x}\left(x^2 + x - \frac{1}{2}\right) + 1 + \frac{1}{4} \text{ et } \lim_{x\to+\infty} h(x) = 1 + \frac{1}{4}$$