Exercice 141 :

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = cos\,(n\alpha)$ et $v_n = sin\,(n\alpha)$.

Pour les questions a) et b), on suppose $\alpha \notin \pi\mathbb{Z}$.

a) On suppose que $\left(u_n\right)_{n\geqslant 0}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, exprimer v_n en fonction de u_{n+1} et u_n. En déduire que $\left(v_n\right)_{n\geqslant 0}$ converge.

b) On note l et l' les limites de $\left(u_n\right)_{n\geqslant 0}$ et $\left(v_n\right)_{n\geqslant 0}$. En considérant les suites $\left(u_{n+1}\right)_{n\geqslant 0}$ et $\left(v_{n+1}\right)_{n\geqslant 0}$, donner deux relations entre l et l'.

c) Conclure que $\left(u_n\right)_{n\geqslant 0}$ converge si et seulement si $\alpha \in 2\pi\mathbb{Z}$ et que $\left(v_n\right)_{n\geqslant 0}$ converge si et seulement si $\alpha \in \pi\mathbb{Z}$.

Solution :

a) En utilisation les propriétés du cosinus, on peut écrire :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = cos\left((n+1)\,\alpha\right) = cos\,(n\alpha)\,cos\,(\alpha) - sin\,(n\alpha)\,sin\,(\alpha) = u_n cos\,(\alpha) - v_n sin\,(\alpha)$$

Par hypothèse, $sin\,(\alpha) \neq 0$ et donc : $\boxed{v_n = \dfrac{u_n cos\,(\alpha) - u_{n+1}}{sin\,(\alpha)}}$

Comme par hypothèse, $\left(u_n\right)_{n\geqslant 0}$ converge, $\forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ \left|u_n - l\right| < \epsilon.$

Ainsi on a pour $n \geqslant N$:

$$\left|\frac{u_n cos\,(\alpha) - u_{n+1}}{sin\,(\alpha)} - \frac{l cos\,(\alpha) - l}{sin\,(\alpha)}\right| = \left|\frac{\left(u_n - l\right) cos\,(\alpha)}{sin\,(\alpha)} - \frac{u_{n+1} - l}{sin\,(\alpha)}\right| \leqslant \epsilon\left(\left|\frac{cos\,(\alpha)}{sin\,(\alpha)}\right| + \left|\frac{1}{sin\,(\alpha)}\right|\right)$$

$\boxed{\text{Ce qui permet de conclure que } \left(u_n\right)_{n\geqslant 0} \text{ converge.}}$

b) La question précédente nous donne déjà : $l' = l\,\dfrac{cos\,(\alpha) - 1}{sin\,(\alpha)}$.

Partons maintenant de v_{n+1} :

$$v_{n+1} = sin\left((n+1)\,\alpha\right) = cos\,(n\alpha)\,sin\,(\alpha) + sin\,(n\alpha)\,cos\,(\alpha) = u_n sin\,(\alpha) + v_n cos\,(\alpha).$$

Ce qui donne cette fois : $l = l'\dfrac{1 - cos\,(\alpha)}{sin\,(\alpha)}$.

$\boxed{\text{Finalement } l' = l\,\dfrac{cos\,(\alpha) - 1}{sin\,(\alpha)} \text{ et } l = l'\dfrac{1 - cos\,(\alpha)}{sin\,(\alpha)}}$

c) En utilisant les relations précédentes :

$l = -\,l\,\dfrac{\left(cos\,(\alpha) - 1\right)^2}{sin^2\,(\alpha)}$, ce qui est impossible, sauf si $cos\,(\alpha) - 1 = 0$ et ainsi $\alpha \in 2\pi\mathbb{Z}$.

La réciproque est évidente, car pour $\alpha \in 2\pi\mathbb{Z}$, $\left(u_n\right)_{n\geqslant 0}$ est constante égale à 1.

Cependant, les calculs précédents reposent sur $\alpha \notin \pi\mathbb{Z}$! On conclut donc que si $\alpha \notin \pi\mathbb{Z}$, $\left(u_n\right)_{n\geqslant 0}$ et $\left(v_n\right)_{n\geqslant 0}$ divergent.

$\boxed{\text{Il ne reste dans que les solutions triviales : } \left(u_n\right)_{n\geqslant 0} \text{ converge ssi } \alpha \in 2\pi\mathbb{Z} \text{ et } \left(v_n\right)_{n\geqslant 0} \text{ converge ssi } \alpha \in \pi\mathbb{Z}.}$

Exercice 142 :

a) Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe exactement un entier naturel k tel que l'écriture décimale de 2^k comporte m chiffres et commence par un 1.

b) Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, N_n le nombre de $k \in \{0,1,...,n-1\}$ tels que l'écriture décimale de 2^k commence par un 1. Déterminer la limite de la suite $\left(\dfrac{N_n}{n}\right)_{n\geqslant 1}$.

Solution :

a) Etudions les premiers rang de la propriété recherchée :

$m=1$: $k=0$, $2^k=1$ est bien le seul entier répondant à la contrainte (les puissances suivantes sont 2, 4 et 8).

$m=2$: $k=4$, $2^k=16$ est bien le seul entier correspondant (les puissances suivantes sont 32 et 64).

Puis $m=3$: $k=7$, $2^k=128$

On peut regarder le comportement avec un petit programme Python :

```
def power_of_2(n):
        for i in range(n):
                p=2**i
                p=str(p)
                if p[0] == '1':
                        print(2**i, i)

power_of_2(100)
```

Si on formalise, on cherche à encadrer 2^k entre 10^m et 2×10^m :

On cherche donc : $10^m \leqslant 2^k < 2\times 10^m$, ce qui est équivalent à

$m\,ln(10) \leqslant k\,ln(2) < m\,ln(10) + ln(2)$

Ou finalement $m\dfrac{ln(10)}{ln(2)} \leqslant k < m\dfrac{ln(10)}{ln(2)} + 1$

D'après cet encadrement de type $[M, M+1[$, on peut conclure à l'existence et l'unicité de k

b) La question précédente nous indique qu'à chaque fois que 2^k commence par un 1, l'écriture décimale comporte un chiffre de plus.

On a donc : $10^{N_n} \leqslant 2^n < 10^{N_n+1}$. Ce qui donne, avec le même raisonnement que précédemment :

$N_n ln(10) \leqslant n\,ln(2) < \left(N_n+1\right) ln(10)$ ou $(n-1)\dfrac{ln(2)}{ln(10)} \leqslant N_n \leqslant n\dfrac{ln(2)}{ln(10)}$.

En utilisant le théorème des gendarmes, on conclut : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{N_n}{n} = \dfrac{ln(2)}{ln(10)}$

Exercice 143 :

Déterminer la limite de $\left(u_n\right)_{n\geqslant 0}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k!$

Solution :

Les premiers termes de la suite : $u_0=1$, $u_1=2$, $u_2=2$, $u_3=\dfrac{5}{3}$, $u_4=\dfrac{17}{12}$, $u_5=\dfrac{77}{60}$.

On peut écrire pour $n \geqslant 1$: $u_{n+1} = \dfrac{1}{(n+1)!}\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} k! = 1 + \dfrac{1}{n+1}\left(\dfrac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} k!\right) = 1 + \dfrac{u_n}{n+1}$.

De cette expression on déduit que si $\left(u_n\right)_{n\geqslant 0}$ converge vers une limite, cette limite $l = 1$. (En effet, si $u_n \to l$, $u_{n+1} \to l$).
Tous les termes considérés dans la définitions de $\left(u_n\right)_{n\geqslant 0}$ étant positifs,

Considérons la différence $u_{n+1} - u_n = \ 1 + \dfrac{u_n}{n+1} - u_n = 1 - \dfrac{n}{n+1}u_n$.
On s'intéresse à la limite, donc pour n « assez grand », on peut écrire
$u_n = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k! = 1 + \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n\,(n-1)} + \dfrac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n-3} k!$ et $u_n \geqslant 1 + \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n\,(n-1)}$.

Donc $\dfrac{n}{n+1}u_n \geqslant \dfrac{n}{n+1}\left(1 + \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n\,(n-1)}\right) = \dfrac{n\left(n\,(n-1) + n - 1 + 1\right)}{(n+1)\,n\,(n-1)} = \dfrac{2n}{n+1} \geqslant 1$

On en tire que $\left(u_n\right)_{n\geqslant 0}$ est décroissante et minorée, donc convergente.

D'après la remarque faite au début, $\left(u_n\right)_{n\geqslant 0}$ converge vers 1.