Dans ce chapitre, sauf indication contraire, la fonction φ_α fait référence à $\varphi_\alpha : x \mapsto x^\alpha$

Exercice 214 :

L'inégalité entre moyenne géométrique et moyenne harmonique

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $x_1, \ldots, x_n$ des éléments de $\mathbb{R}_+^*$. La moyenne harmonique de $\left(x_1, \ldots, x_n\right)$ est le réel H tel que $\frac{1}{H}$ soit la moyenne arithmétique de $\left(\frac{1}{x_1}, \ldots, \frac{1}{x_n}\right)$. En d'autres termes, $H = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}}$.

En utilisant le théorème 7 à $\left(\frac{1}{x_1}, \ldots, \frac{1}{x_n}\right)$, montrer que $H \leqslant \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i}$ et qu'il y a égalité si et seulement si tous les x_i sont égaux.

Solution :

Par définition, $\frac{1}{H} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}$ est donc la moyenne arithmétique des $\left(\frac{1}{x_1}, \ldots, \frac{1}{x_n}\right)$.

Si on applique le théorème 7, on a l'inégalité : $\frac{1}{H} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} \geqslant \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n \frac{1}{x_i}} = \frac{1}{\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i}}$

En passant à l'inverse, ce qui change le sens de l'inégalité, on trouve bien :

$$\boxed{H = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}} \leqslant \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i}}$$

En appliquant la deuxième partie du théorème 7 aux $\left(\frac{1}{x_1}, \ldots, \frac{1}{x_n}\right)$, on sait qu'il y a égalité si et seulement si tous les $\frac{1}{x_i}$ sont égaux.

$\boxed{\text{Et donc, il y a égalité si et seulement si tous les } x_i \text{ sont égaux.}}$

Exercice 215 :

L'inégalité arithmético-géométrique, la preuve de Cauchy.

Pour n dans $\mathbb{N}^*$, on se propose d'établir la propriété suivante, que l'on appelle P_n : pour tout n-uplet $\left(x_1, \ldots, x_n\right)$ d'éléments de $\mathbb{R}_+^*$, on a $\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i$ avec égalité si et seulement si tous les x_i sont égaux. La démonstration proposée dans cet exercice est due à Cauchy.

On note A l'ensemble des n de $\mathbb{N}^*$ tels que P_n soit vraie.

a) Montrer que P_2 est vraie.

b) Soit n dans $\mathbb{N}^*$. Montrer que si P_n est vraie, il en est de même pour P_{2n}.

c) Soit n dans $\mathbb{N}^*$. Montrer que si P_{n+1} est vraie, il en est de même de P_n. On pourra avec $x_1, \ldots, x_n$ des éléments de $\mathbb{R}_+^*$, poser $x_{n+1} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i$.

d) Conclure avec l'exercice 13 de 1.3.

Solution :

a) On considère x_1 et x_2 dans $\mathbb{R}_+^*$.

On sait que $\left(\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}\right)^2 = x_1 + x_2 - 2\sqrt{x_1 x_2} \geqslant 0$ (le cas d'égalité est trivial dans ce cas).

$\boxed{\text{On conclut donc que } \sqrt{x_1 x_2} \leqslant \dfrac{x_1 + x_2}{2} \text{ et que } P_2 \text{ est vraie.}}$

b) On suppose par hypothèse que P_n est vraie. On sait également que P_2 est vraie par la question précédente.

On considère 2 n-uplet $\left(x_1, \ldots, x_n\right)$ et $\left(x_{n+1}, \ldots, x_{2n}\right)$ d'éléments de $\mathbb{R}_+^*$.

On pose alors $X_1 = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i}$ et $X_2 = \sqrt[n]{\prod_{i=n+1}^{2n} x_i}$

En utilisant P_2, on trouve : $\sqrt{X_1 X_2} \leqslant \dfrac{1}{2}\left(X_1 + X_2\right)$ ou

$$\sqrt{\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i}\sqrt[n]{\prod_{i=n+1}^{2n} x_i}} \leqslant \frac{1}{2}\left(\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i} + \sqrt[n]{\prod_{i=n+1}^{2n} x_i}\right)$$

On utilise alors P_n pour majorer la partie droite de l'inégalité précédente :

$$\frac{1}{2}\left(\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i} + \sqrt[n]{\prod_{i=n+1}^{2n} x_i}\right) \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i + \frac{1}{n}\sum_{i=n+1}^{2n} x_i\right)$$

Et finalement, en réécrivant les 2 parties : $\sqrt[2n]{\prod_{i=1}^{2n} x_i} \leqslant \dfrac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n} x_i$, ce qu'on identifie bien à l'inégalité de P_{2n}.

Le cas d'égalité se produit quand on a l'égalité pour P_2 et P_n, donc l'ensemble des x_i sont égaux.

$\boxed{\text{Donc si } P_n \text{ est vraie, il en est de même pour } P_{2n}.}$

c) Supposons cette fois que P_{n+1} est vraie.

Comme proposé par l'énoncé, considérons le $(n+1)$-uplet $\left(x_1, \ldots, x_n, \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)$ et écrivons P_{n+1} :

$$\sqrt[n+1]{\prod_{i=1}^{n}\left(x_i\right) \times \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)} \leqslant \frac{1}{n+1}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)$$

Or $\dfrac{1}{n+1}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i + \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$

On a donc $\sqrt[n+1]{\prod_{i=1}^{n}\left(x_i\right) \times \left(\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)} \leqslant \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$, ce qui donne $\sqrt[n+1]{\prod_{i=1}^{n}\left(x_i\right)} \leqslant \sqrt[n+1]{\left(\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^n}$

Ce qui donne finalement $\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$

Remarque : je n'ai pas détaillé les calculs sur les puissances, mais si ceux-ci ne sont pas intuitifs, n'hésitez évidemment pas à bien poser toutes les étapes pour vous assurer de votre compréhension.

Le cas d'égalité se déduit de P_{n+1}, qui impose l'égalité de tous les x_i.

Et finalement, si P_{n+1} est vraie, il en est de même de P_n

d) L'exercice 13 est proposé par ailleurs, on ne revient pas dessus : https://antoinemaths.wordpress.com/2023/07/18/raisonnement-par-recurrence-4-exercices/. En 2 mots, il nous assure que les conditions « $n \Rightarrow 2n$ » et « $n+1 \Rightarrow n$ » permet de s'assurer que la propriété est vraie sur $\mathbb{N}^*$.

Ainsi, on conclut que P_n est vraie pour tout n de $\mathbb{N}^*$.

Exercice 216 :

Volume maximal d'un parallélépipède rectangle d'aire latérale fixée

Les arêtes d'un parallélépipède rectangle ont pour longueurs $a,\ b,\ c$. Le volume du parallélépipède est noté V, son aire latérale (la somme des aires de ses 6 faces) S.

a) Calculer V et S en fonction de $a,\ b,\ c$.

b) Montrer que $\frac{ab+bc+ca}{3} \geqslant V^{\frac{2}{3}}$. A quelle condition y'a-t-il égalité ?

c) Quel est le volume maximal d'un parallélépipède d'aire latérale S donnée? Pour quels parallélépipèdes est-il atteint ?

Solution :

a) Le parallélépipède est composé de 3 paires de faces d'aires $ab,\ bc$ et ca.

On a donc $S = 2\left(ab+bc+ca\right)$

Son volume est $V = abc$

b) On applique l'inégalité arithmético-géométrique aux aires des faces du parallélépipède :

$\frac{ab+bc+ca}{3} \geqslant \sqrt[3]{\left(abc\right)^2}$

Avec la question précédente, on obtient bien : $\frac{ab+bc+ca}{3} \geqslant V^{\frac{2}{3}}$

L'égalité est atteinte pour $ab = bc = ca$, ce qui impose $a = b = c$.

c) D'après la question précédente, le volume est maximisé en cas d'égalité de l'inégalité arithmético-géométrique.

Ainsi, le volume est maximal pour un cube.

Exercice 217 :

Inégalité isopérimétrique pour les triangles

Soit ABC un triangle. On note $a,\ b,\ c$ les longueurs respectives des côtés $BC,\ CA,\ AB$. Le demi-périmètre de ABC est noté p : $p = \frac{a+b+c}{2}$. L'aire de ABC est noté S.

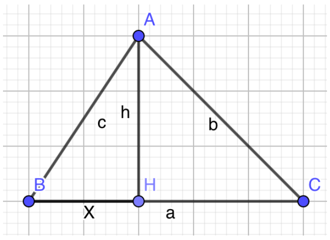
Le but des 3 premières questions est de démontrer la formule de Héron : $S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)$.

a) Au moins une des hauteurs est intérieure au triangle. Supposons que ça soit le cas de la hauteur issue de A, dont on note H le pied. On pose $h = AH$ et $x = BH$.
Montrer que $x^2 + h^2 = c^2$ et que $(a-x)^2 + h^2 = b^2$.

b) Montrer que $16S^2 = 4a^2h^2 = 4a^2c^2 - 4a^2x^2$.
c) Établir la formule de Héron.
d) En déduire l'inégalité : $S \leqslant \dfrac{p^2}{3\sqrt{3}}$, l'égalité ayant lieu si le triangle est équilatéral. Ainsi, parmi tous les triangles de périmètre fixé, l'aire maximale est atteinte pour les triangles équilatéraux.

Solution :

a) Représentation graphique :



En appliquant le théorème de Pythagore sur les « demi-triangles » séparés par la hauteur, on trouve directement :

$\boxed{x^2 + h^2 = c^2 \text{ et que } (a-x)^2 + h^2 = b^2}$

b) On sait que la surface de ABC est $S = \dfrac{ah}{2}$ et ainsi $16S^2 = 4a^2h^2$.
Et d'après la question précédente, $h^2 = c^2 - x^2$.

$\boxed{\text{Ainsi } 16S^2 = 4a^2h^2 = 4a^2c^2 - 4a^2x^2.}$

c) Développons :

$$\left(a+b+c\right)\left(a+b-c\right)\left(a+c-b\right)\left(b+c-a\right) = \left(a^2+2ab+b^2-c^2\right)\left(2ab-a^2+c^2-b^2\right)$$
$$= -a^4 + 2a^2b^2 + 2b^2c^2 - b^4 + 2a^2c^2 - c^4$$
$$= -a^4 + 2a^2\left((a-x)^2 + c^2 - x^2\right) + 2\left((a-x)^2 + c^2 - x^2\right)c^2 - \left((a-x)^2 + c^2 - x^2\right)^2 + 2a^2c^2 - c^4$$
$$= -a^4 + 2a^2\left(a^2 - 2ax + c^2\right) + 2c^2\left(a^2 - 2ax + c^2\right) - \left(a^2 - 2ax + c^2\right)^2 + 2a^2c^2 - c^4$$
$$= -a^4 + 2a^4 - 4a^3x + 2a^2c^2 + 2a^2c^2 - 4axc^2 + 2c^4 - a^4 + 4a^3x - 2a^2c^2 - 4a^2x^2 + 4ac^2x - c^4 + 2a^2c^2 - c^4$$
$$= 4a^2c^2 - 4a^2x^2$$

$\boxed{\text{Et donc } 16S^2 = \left(a+b+c\right)\left(a+b-c\right)\left(a+c-b\right)\left(b+c-a\right)\text{, ce qui est la formule de Héron.}}$

(Plus précisément, c'est équivalent à la formule de Héron, car on devrait mettre le $\dfrac{1}{16}$ en facteur du membre de droite).

Toujours un ouf de soulagement en fin de calcul !

d) En utilisant l'inégalité arithmético-géométrique on a :

$$\sqrt[3]{\left(p-a\right)\left(p-b\right)\left(p-c\right)} \leqslant \frac{\left(p-a\right)+\left(p-b\right)+\left(p-c\right)}{3} = \frac{p}{3}$$ ou encore :

$$\left(p-a\right)\left(p-b\right)\left(p-c\right) \leqslant \frac{p^3}{27}$$

Et comme d'après la formule de Héron : $\left(p-a\right)\left(p-b\right)\left(p-c\right)=\dfrac{S^2}{p}$, on trouve que $\dfrac{S^2}{p}\leqslant\dfrac{p^3}{27}$.

$\boxed{\text{On conclut donc } S\leqslant\dfrac{p^2}{3\sqrt{3}}.}$

Le cas d'égalité se produit pour $p-a=p-b=p-c$.

$\boxed{\text{Ce qui signifie que le cas d'égalité se produit pour un triangle équilatéral.}}$