∽ Brevet Amiens juin 1980 ∾

Algèbre

On considère les applications f et g définies dans $\mathbb{R}$ telles que

$$\begin{array}{rcl} f(x) & = & 3(x-2)^2-(x-2)(x+1)-x+2,\\ g(x) & = & (x+2)^2-4(x-1)^2. \end{array}$$

1. Développer, réduire et ordonner les polynômes $f(x)$ et $g(x)$.
2. Factoriser $f(x)$ puis $g(x)$.
3. Calculer les images par g des réels $-\dfrac{2}{3}$ et $\sqrt{2}$.
4. Résoudre dans l'ensemble des réels, les équations

$$f(x)=0 \quad ; \quad g(x)=0 \quad ; \quad f(x)-g(x)=0.$$

5. Soit Q la fonction rationnelle définie dans $\mathbb{R}$ par

$$Q(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}.$$

   Utiliser les résultats de la question précédente pour préciser l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de la fonction Q et pour résoudre

$$Q(x)=0 \qquad \text{et} \qquad Q(x)=1.$$

6. Le réel x étant élément de l'ensemble $\mathcal{D}$, simplifier $Q(x)$.
   Soit $Q'(x)$ la forme -simplifiée, on vérifiera que

$$Q'(x)=-\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{x-2}{x}\right).$$

7. Résoudre, dans $\mathbb{R}$,

$$Q'(x)=-1, \qquad |Q'(x)|=2.$$

Géométrie

On considère un plan euclidien (P) muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

1. Placer les points

$$\text{A}(5\,;\,0),\qquad \text{B}(-5\,;\,0),\qquad \text{E}(3\,;\,4)\quad \text{et}\quad \text{F}(1\,;\,-2).$$

2. **a.** Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{\text{AE}}$ et $\overrightarrow{\text{BE}}$ sont orthogonaux.
   b. En déduire que le point E appartient au cercle $\mathcal{C}$ de diamètre [AB].
   Construire ce cercle.
3. Le cercle $\mathcal{C}'$ de diamètre [OB] coupe la droite (BE) en K.
   a. Montrer que les droites (OK) et (AE) sont parallèles.
   b. En déduire que K est le milieu de (B, E).
   c. Calculer les coordonnées de ce point K.
4. **a.** Comparer les distances FK et KE.
   b. Montrer que le quadruplet (A, E, K, F) est un carré.